

VORLESUNGSANKÜNDIGUNG:

„ADDITIVE KOMBINATORIK UND ZAHLENTHEORIE“ IM SOMMERSEMESTER 2025

Die **additive Zahlentheorie** beschäftigt sich damit, wie sich arithmetisch interessante Mengen unter Addition verhalten. Berühmte Beispiele davon sind:

- Welche Zahlen lassen sich als Summe von zwei (oder drei oder vier) Quadratzahlen schreiben? (Zwei-Quadrate-Satz von Fermat, Vier-Quadrate-Satz von Lagrange, Waringsches Problem,...)
- Ist jede gerade Zahl $n \geq 4$ die Summe von zwei Primzahlen? (Goldbachsche Vermutung)
- Gibt es beliebig lange arithmetische Folgen $(a, a+d, a+2d, \dots)$ von Primzahlen? (Green-Tao)

Diese Probleme sind oft sehr schwer. In der **additiven Kombinatorik** versuchen wir uns solchen Problemen anzunähern und dabei möglichst wenige Informationen über die Struktur der zugrundeliegenden Mengen vorauszusetzen. Typische Fragestellungen sind dann:

- Was können wir über die Summenmenge $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ von zwei allgemeinen Mengen A und B aussagen? Hier könnten A und B zum Beispiel die Menge der Primzahlen oder die Menge der Quadratzahlen sein.
- Unter welchen Bedingungen enthält eine Menge arithmetische Progressionen?

Der Satz von Szemerédi, ein Meilenstein der Mathematik des 20. Jahrhunderts, besagt, dass jede Menge mit „positiver Dichte“ beliebig lange arithmetische Progressionen enthält. Den Fall von Progressionen der Länge 3, der von Klaus Roth bewiesen wurde (der später eine Fields-Medaille gewann!), werden wir in dieser Vorlesung vollständig beweisen. Durch eine Verfeinerung dieser Methoden wurde 2020 dann auch gezeigt, dass die Primzahlen tatsächlich allein schon deshalb unendlich viele arithmetische Progressionen der Länge 3 enthalten, weil es „genügend“ Primzahlen gibt!

Als weitere Highlights in der Vorlesung werden wir den Satz von Erdős–Szemerédi und den Satz von Freiman beweisen. Nebenbei entwickeln wir ganz unterschiedliche Methoden wie Fourier-Analyse, die probabilistische Methode, die Polynommethode und Inzidenzgeometrie und wenden Sie auf die genannten Probleme an. *Vorkenntnisse dieser Methoden sind nicht erforderlich.*

- **Voraussetzungen:** Algebra I, Analysis I
- **Organisatorisches:** zweistündige Vorlesung (Mi, 10–12 Uhr) mit Übung (Do, 16–18 Uhr)
- **Literatur:** Eine klassische (zugängliche, aber etwas veraltete) Einführung in das Thema der Vorlesung ist *Melvyn Nathanson: Additive Number Theory. Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*. Neuer, aber auch wesentlich fortgeschrittener (und damit weit über das Ziel dieser Vorlesung hinausführend) ist *Terence Tao, Van Vu: Additive Combinatorics*. Eine sehr gute Referenz (die sich allerdings auch nur teilweise mit dem Material der Vorlesung deckt) sind die Lecture Notes von Thomas Bloom: <http://thomasbloom.org/teaching/AC2021.pdf>.

Kontakt: Christian Bernert
bernert@math.uni-hannover.de