# Die Hakenformel

Benjamin Sambale

17. Dezember 2019

Jedes Element im Polynomring $R := \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_m]$ lässt sich eindeutig in der Form

$$\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_m \geq 0} a_{i_1,\ldots,i_m} X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m}$$

schreiben, wobei nur endlich viele Koeffizienten $a_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{Q}$ von Null verschieden sind. Man nennt

$$\deg \alpha := \sup\{i_1 + \ldots + i_m : a_{i_1,\ldots,i_m} \neq 0\}$$

den *Grad* von $\alpha$, wobei $\deg 0 = \sup \varnothing = -\infty$. Der Quotientenkörper $K := Q(R) = \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_m)$ ist der Körper der rationalen Funktionen, d. h. jedes Element in $K$ lässt sich in der Form $\frac{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha, \beta \in R$ und $\beta \neq 0$ schreiben. Dabei gilt

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1.$$

**Lemma 1.** *Durch* $\deg \frac{\alpha}{\beta} := \deg(\alpha) - \deg(\beta)$ *erhält man eine wohldefinierte Funktion* $\deg : K \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *mit den Eigenschaften:*

*(i)* $\deg(a) = -\infty \Longleftrightarrow a = 0$,

*(ii)* $\deg(a + b) \leq \max\{\deg(a), \deg(b)\}$,

*(iii)* $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$

*für alle* $a, b \in K$.

*Beweis.* Die Eigenschaften gelten offensichtlich für $a, b \in R$. Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ mit $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$. Dann gilt

$$\deg(\alpha_1) + \deg(\beta_2) = \deg(\alpha_1\beta_2) = \deg(\alpha_2\beta_1) = \deg(\alpha_2) + \deg(\beta_1).$$

Dies zeigt

$$\deg \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \deg(\alpha_1) - \deg(\beta_1) = \deg \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Daher ist deg auch auf $K$ wohldefiniert. Sicher gilt

$$\deg \frac{\alpha}{\beta} = -\infty \Longleftrightarrow \deg \alpha = -\infty \Longleftrightarrow \alpha = 0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ ist

$$\begin{aligned}
\deg\Big(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\Big) &= \deg\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} = \deg(\alpha\delta+\beta\gamma)-\deg(\beta)-\deg(\delta) \\
&\le \max\{\deg(\alpha\delta)-\deg(\beta)-\deg(\delta), \deg(\beta\gamma)-\deg(\beta)-\deg(\delta)\} \\
&= \max\{\deg(\alpha)-\deg(\beta), \deg(\gamma)-\deg(\delta)\} = \max\Big\{\deg\frac{\alpha}{\beta}, \deg\frac{\gamma}{\delta}\Big\}
\end{aligned}$$

und

$$\deg\frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma}{\delta} = \deg(\alpha\gamma)-\deg(\beta\delta) = \deg(\alpha)-\deg(\beta)+\deg(\gamma)-\deg(\delta) = \deg\frac{\alpha}{\beta}+\deg\frac{\gamma}{\delta}. \qquad \square$$

Zwei Polynome $\alpha, \beta \in R$ heißen *assoziiert*, falls $\alpha = c\beta$ für ein $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $R$. Ein Polynom $\varphi \in R \setminus \mathbb{Q}$ heißt *irreduzibel*, falls keine Faktorisierung $\varphi = \alpha\beta$ mit $\alpha, \beta \in R \setminus \mathbb{Q}$ existiert. Wegen $\deg(\alpha\beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ sind Polynome vom Grad 1 stets irreduzibel.

Sei $P$ ein Repräsentantensystem für die irreduziblen Elemente von $R$ bis auf Assoziiertheit. Durch Induktion nach dem Grad sieht man, dass jedes $\alpha \in R \setminus \{0\}$ eine Faktorisierung der Form

$$\alpha = e \prod_{\varphi \in P} \varphi^{a_\varphi} \tag{1}$$

mit $e \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $a_\varphi \ge 0$ für $\varphi \in P$ besitzt. Nach dem Lemma von Gauß (Algebra 2) ist diese Faktorisierung eindeutig, d. h. $R$ ist ein *faktorieller* Ring.

**Lemma 2.** *In $K$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{m} X_k \prod_{i \ne k}\Big(1+\frac{1}{X_i - X_k}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{m} X_k\Big) - \binom{m}{2}. \tag{2}$$

*Beweis* (*Zhang*). Sei

$$\begin{aligned}
\Delta &:= \prod_{1 \le i < j \le m} (X_i - X_j), \\
A_k &:= X_k \frac{\Delta}{\prod_{i \ne k}(X_i - X_k)} \prod_{i=1}^{m} (X_i - X_k + 1) \qquad (1 \le k \le m).
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $A_k \in R$ und $\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{m} A_k$ ist die linke Seite von (2). Wir zeigen zunächst, dass dieser Ausdruck in $R$ liegt. Sei dafür $1 \le s < t \le m$. Für $s \ne k \ne t$ ist $X_s - X_t$ ein Teiler von $A_k$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\prod_{i\neq s}(X_i - X_s)} &= (-1)^{m-s} \prod_{\substack{1\le i<j\le m\\ i\neq s\neq j}} (X_i - X_j) \\
&= (-1)^{m-s} \prod_{s\neq i<t} (X_i - X_t) \prod_{t<j} (X_t - X_j) \prod_{\substack{1\le i<j\le m\\ i\neq s\neq j\\ i\neq t\neq j}} (X_i - X_j) \\
&\equiv (-1)^{m-s} \prod_{s\neq i<t} (X_i - X_s) \prod_{t<j} (X_s - X_j) \prod_{\substack{1\le i<j\le m\\ i\neq s\neq j\\ i\neq t\neq j}} (X_i - X_j) \\
&\equiv (-1)^{m-s}(-1)^{t-s-1} \prod_{\substack{1\le i<j\le m\\ i\neq t\neq j}} (X_i - X_j) \\
&\equiv -(-1)^{m-t} \prod_{\substack{1\le i<j\le m\\ i\neq t\neq j}} (X_i - X_j) \equiv -\frac{\Delta}{\prod_{i\neq t}(X_i - X_t)} \pmod{X_s - X_t}.
\end{aligned}$$

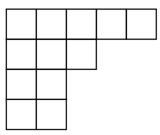
Dies zeigt $\sum_{k=1}^m A_k \equiv A_s + A_t \equiv 0 \pmod{X_s - X_t}$, d. h. $\sum A_k$ ist durch $X_s - X_t$ teilbar. Da die Polynome $X_s - X_t$ irreduzibel und paarweise nicht assoziiert sind, ist $\Delta$ ein Teiler von $\sum A_k$ (wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung (1)). Somit ist die linke Seite von (2) in $R$. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$X_k \prod_{i\neq k}\Big(1 + \frac{1}{X_i - X_k}\Big) = X_k + \sum_{i\neq k} \frac{X_k}{X_i - X_k} + \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,m\}\setminus\{k\}\\ |S|\ge 2}} X_k \prod_{s\in S} \frac{1}{X_s - X_k}.$$

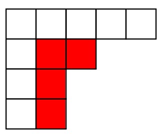
Der erste Term hat Grad 1, der zweite Grad $\le 0$ und der dritte Grad $\le -1$. Durch Summieren über $k$ können die Grade nicht wachsen nach Lemma 1. Die Terme vom Grad $-1$ müssen sich in der Summe (über $k$) also aufheben. Die Terme vom Grad 1 addieren sich zu $\sum X_k$ wie gewünscht. Die Terme vom Grad 0 addieren sich zu

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i\neq k} \frac{X_k}{X_i - X_k} = \sum_{1\le i<k\le m} \frac{X_k - X_i}{X_i - X_k} = -\binom{m}{2}. \qquad \square$$

Eine *Partition* von $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ natürlicher Zahlen mit $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_m \ge 1$ und $\sum_{i=1}^m \lambda_i = n$. Das *Young-Diagramm* $[\lambda]$ von $\lambda$ ist eine rechteckige, linksbündige Anordnung von $n$ *Boxen* mit $\lambda_i$ Boxen in der $i$-ten Zeile. Zum Beispiel:

$[(5, 3, 2, 2)] =$ 

Sei $b$ die Box im Young-Diagramm an Position $(s, t)$. Der *Haken* von $b$ ist die Menge der Boxen $H(b) := \{(s, j) : j \ge t\} \cup \{(i, t) : i \ge s\}$ in $[\lambda]$. Sei $h(b) := |H(b)|$ die *Länge* des Hakens. Der Haken $H(2, 2)$ mit Länge 4 im obigen Beispiel ist rot markiert:



Ein *Young-Tableau* von $\lambda$ ist ein mit den Zahlen $1, \ldots, n$ ausgefülltes Young-Diagramm, wobei die Einträge in jeder Zeile und jeder Spalte absteigend sind. Zum Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 8 | 11 | 12 |
| 2 | 4 | 10 | | |
| 5 | 7 | | | |
| 6 | 9 | | | |

Die Anzahl aller Young-Tableaux von $\lambda$ sei $f^\lambda$.

**Satz 3** (Hakenformel)**.** *Für jede Partition $\lambda$ von $n$ gilt*

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{b\in[\lambda]} h(b)}. \tag{3}$$

*Beweis* (*Glass-Ng*)*.* Induktion nach $n$: Für $n = 1$ ist $\lambda = (1)$ und $f^\lambda = 1$ wie behauptet. Sei nun $n \geq 2$ und $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. In jedem Young-Tableau von $\lambda$ befindet sich die Zahl $n$ an einer „Ecke", d. h. durch Entfernen von $n$ erhält man ein Young-Tableau einer Partition $\mu$ von $n-1$. Wir schreiben in diesem Fall $\mu < \lambda$. Offenbar gilt

$$f^\lambda = \sum_{\mu<\lambda} f^\mu.$$

Es genügt zu zeigen, dass die rechte Seite von (3) die gleiche Rekursionsvorschrift erfüllt. Das Produkt der Hakenlängen in der $k$-ten Zeile von $\lambda$ ist (von rechts nach links gelesen):

$$\begin{gathered}[1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\lambda_k-\lambda_{k+1})][(\lambda_k-\lambda_{k+1}+2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k+2}+1)]\\ [(\lambda_k-\lambda_{k+2}+3)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k+3}+2)]\ldots[(\lambda_k-\lambda_m+m-k+1)\ldots(\lambda_k+m-k)]\\ = \frac{(\lambda_k+m-k)!}{\prod_{l>k}(\lambda_k-\lambda_l-k+l)}.\end{gathered}$$

Die rechte Seite von (3) ist daher

$$n!\frac{\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)}{\prod_{l=0}^{m-1}(\lambda_{m-l}+l)!}.$$

Sei

$$\Lambda := \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1},\lambda_k-1,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_m) : k = 1\ \ldots, m\}.$$

Für $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m) \in \Lambda \cup \{\lambda\}$ sei

$$h^\mu := \Big(\sum_{k=1}^m \mu_k\Big)!\frac{\prod_{i<j}(\mu_i-\mu_j+j-i)}{\prod_{l=0}^{m-1}(\mu_{m-l}+l)!}.$$

Im Fall $\mu_m = 0$ ist

$$\begin{aligned}h^\mu &= (n-1)!\frac{\prod_{i<j<m}(\mu_i-\mu_j+j-i)\prod_{i=1}^{m-1}(\mu_i+m-i)}{\prod_{l=1}^{m-1}(\mu_{m-l}+l)!}\\ &= (n-1)!\frac{\prod_{i<j<m}(\mu_i-\mu_j+j-i)\prod_{i=0}^{m-2}(\mu_{m-1-i}+i+1)}{\prod_{l=0}^{m-2}(\mu_{m-1-l}+l+1)!} = h^{(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})}.\end{aligned}$$

Ist $\mu$ eine Partition (von $n-1$), so gilt $h^\mu = f^\mu$ nach Induktion. Ist $\mu$ keine Partition, so existiert ein $k$ mit $\mu_k = \mu_{k+1}-1$ und es folgt $h^\mu = 0$. Daher genügt es

$$h^\lambda = \sum_{\mu\in\Lambda} h^\mu \tag{4}$$

zu zeigen. Für $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - 1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)$ gilt

$$\begin{aligned}
h^\mu &= (n-1)! \frac{\prod\limits_{k \neq i < j \neq k} (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \prod\limits_{j>k} (\lambda_k - \lambda_j + j - k - 1) \prod\limits_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1)}{(\lambda_k + m - k - 1)! \prod_{l \neq m-k} (\lambda_{m-l} + l)!} \\
&= h^\lambda \cdot \frac{\lambda_k + m - k}{n} \prod_{j>k} \frac{\lambda_k - \lambda_j + j - k - 1}{\lambda_k - \lambda_j + j - k} \prod_{i<k} \frac{\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1}{\lambda_i - \lambda_k + k - i} \\
&= h^\lambda \cdot \frac{\lambda_k + m - k}{n} \prod_{i \neq k} \frac{\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1}{\lambda_i - \lambda_k + k - i}.
\end{aligned}$$

Also ist (4) äquivalent zu

$$n = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k + m - k) \prod_{i \neq k} \frac{\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1}{\lambda_i - \lambda_k + k - i}. \tag{5}$$

Wegen $\lambda_1 + m - 1 > \lambda_2 + m - 2 > \dots > \lambda_m$ dürfen wir $X_k$ in Lemma 2 durch $\lambda_k + m - k$ substituieren (keine Null steht im Nenner). Dann erhält man

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k + m - k) \prod_{i \neq k} \frac{\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1}{\lambda_i - \lambda_k + k - i} = \Big( \sum_{k=1}^{m} \lambda_k + m - k \Big) - \binom{m}{2} = n,$$

d. h. (5) gilt. $\square$

## Literatur


[1] K. Glass and C.-K. Ng, *A simple proof of the hook length formula*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), 700–704.

[2] R. Zhang, *On an identity of Glass and Ng concerning the hook length formula*, Discrete Math. **310** (2010), 2440–2442.