

Charaktertheorie

Vorlesung im Wintersemester 2013/14 und Sommersemester 2018

Benjamin Sambale

Vorwort

Das vorliegende Skript basiert auf Vorlesungen im Wintersemester 2013/14 und im Sommersemester 2018 an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Es handelte sich um 3 + 1 Vorlesungen für den Masterstudiengang der Mathematik. Mein Ziel war es möglichst schnell und elementar, die Hauptsätze der Charaktertheorie endlicher Gruppen zu beweisen. Von den Hörern wurden lediglich Vorkenntnisse der Algebra 1 vorausgesetzt (elementare Gruppentheorie und etwas Galoistheorie). Ich habe konsequent auf die Begriffe „Modul“ und „Gruppenalgebra“ verzichtet (üblicherweise Bestandteile einer Algebra 2 Vorlesung). Ich bedanke mich bei René Reichenbach und Sebastian Uschmann für zahlreiche Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge.

Folgende Quellen liegen dem Skript zu Grunde (in absteigender Priorität):

- Külshammer, Skript zur Darstellungstheorie, <http://www.minet.uni-jena.de/algebra/skripten/dt/dt-2010/dt.pdf>.
- Isaacs, *Character theory of finite groups*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006
- Huppert, *Character theory of finite groups*, Expositions in Mathematics, Vol. 25, Walter de Gruyter GmbH & Co., Berlin, 1998
- Berkovich und Zhmud, *Characters of finite groups. Part 1*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 172, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- Huppert, *Endliche Gruppen I*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134, Springer-Verlag, Berlin, 1967
- Isaacs, *Finite group theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008
- Berkovich, *Groups of prime power order 1*, Expositions in Mathematics, Vol. 46, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008
- Tao, *Hilbert's fifth problem and related topics*, <http://terrytao.wordpress.com/2011/08/27/254a-notes-0-hilberts-fifth-problem-and-related-topics>
- Grove, *Groups and characters*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997
- Fulton und Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991

Jena, 20. Juli 2018, Benjamin Sambale

Inhaltsverzeichnis

1	Darstellungen und Charaktere	4
2	Charaktertafeln	10
3	Ganz-algebraische Zahlen	13
4	Cliffordtheorie	16
5	Frobeniusgruppen	21
6	Induktionssätze	23
7	Frobenius-Schur-Indikatoren	29
8	Normale Komplemente	33
9	Nullen in der Charaktertafel	38
10	Endliche lineare Gruppen	40
11	Die Charaktere von S_n und A_n	46
	Aufgaben	54
	Stichwortverzeichnis	62

1 Darstellungen und Charaktere

Stets sei G eine endliche Gruppe.

Definition 1.1. Sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Eine *Darstellung* von G ist ein Homomorphismus $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Der *Grad* der Darstellung ist $n := \dim V$. Durch Wahl einer Basis von V erhält man eine entsprechende *Matrixdarstellung* $\Delta' : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Beispiel 1.2.

- (i) Die *triviale* (Matrix-)Darstellung $1_G : G \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ ist gegeben durch $g \mapsto 1$ für $g \in G$.
- (ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\text{sgn} : S_n \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $g \mapsto \text{sgn}(g)$ eine Darstellung vom Grad 1.
- (iii) Für zwei Darstellungen $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ und $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(W)$ ist auch $\Delta \oplus \Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V \times W)$ eine Darstellung. Dabei ist $((\Delta \oplus \Gamma)(g))(v, w) := ((\Delta(g))(v), (\Gamma(g))(w))$ für $g \in G$, $v \in V$ und $w \in W$.
- (iv) Ist $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung und $H \leq G$, so erhält man durch Einschränkung eine Darstellung $\Delta_H : H \rightarrow \text{GL}(V)$, $h \mapsto \Delta(h)$.
- (v) Ist $N \trianglelefteq G$ und $\Delta : G/N \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung, so erhält man durch *Inflation* eine Darstellung $G \rightarrow \text{GL}(V)$, $g \mapsto \Delta(gN)$ auf G . Diese werden wir oft auch mit Δ bezeichnen.
- (vi) Ist $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung und $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \text{Ker}(\Delta)$, so erhält man durch *Deflation* eine wohldefinierte Darstellung $\hat{\Delta} : G/N \rightarrow \text{GL}(V)$, $gN \mapsto \Delta(g)$. Insbesondere ist $\hat{\Delta} : G/\text{Ker}(\Delta) \rightarrow \text{GL}(V)$ eine *treue* Darstellung, d. h. $\hat{\Delta}$ ist injektiv.
- (vii) Inflation und Deflation sind offenbar zueinander invers.

Definition 1.3. Zwei Darstellungen $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ und $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(W)$ heißen *ähnlich*, falls ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ mit $f \circ \Delta(g) = \Gamma(g) \circ f$ für alle $g \in G$ existiert. Gegebenenfalls ist also das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\Delta(g)} & V \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 W & \xrightarrow{\Gamma(g)} & W
 \end{array}$$

Entsprechend sind zwei Matrixdarstellungen $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ ähnlich, falls $n = m$ ist und ein $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ existiert mit $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$ für alle $g \in G$.

Bemerkung 1.4.

- (i) Ähnliche Darstellungen haben den gleichen Grad.
- (ii) Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.
- (iii) Man interessiert sich in der Regel nur für Darstellungen bis auf Ähnlichkeit (so wie für Gruppen bis auf Isomorphie).
- (iv) In der linearen Algebra zeigt man, dass zwei quadratische Matrizen A, B genau dann die gleiche Abbildung beschreiben, wenn es eine invertierbare Matrix T mit $AT = TB$ gibt. Somit sind zwei Matrixdarstellungen Γ_1 und Γ_2 , die einer festen Darstellung Δ von G entsprechen, stets ähnlich.

- (v) Die Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen und Matrixdarstellungen entsprechen sich offenbar. Wir werden daher im Folgenden Darstellungen oft mit ihren entsprechenden Matrixdarstellungen identifizieren.

Definition 1.5. Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung. Ein Untervektorraum $U \leq V$ heißt Δ -invariant, falls $(\Delta(g))(u) \in U$ für alle $g \in G$ und $u \in U$ gilt. Gegebenenfalls ist $\Delta' : G \rightarrow \text{GL}(U)$, $g \mapsto \Delta(g)|_U$ auch eine Darstellung. Sind 0 und V die einzigen Δ -invarianten Untervektorräume, so ist Δ irreduzibel. Anderenfalls ist Δ reduzibel.

Beispiel 1.6.

- (i) Darstellungen vom Grad 1 sind offensichtlich irreduzibel.
(ii) Inflation und Deflation irreduzibler Darstellungen sind wieder irreduzibel (die Bilder ändern sich nicht).

Satz 1.7 (MASCHKE). Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung und $U \leq V$ Δ -invariant. Dann besitzt U ein Δ -invariantes Komplement $W \leq V$, d. h. $V = U \oplus W$.

Beweis. Wir wählen zunächst einen beliebigen Untervektorraum X von V mit $V = U \oplus X$ (lineare Algebra) und bezeichnen mit $h : V \rightarrow V$ die entsprechenden Projektion auf U . Dann setzen wir

$$g := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(x)$$

und $W := \text{Ker}(g)$. Für $u \in U$ ist also

$$g(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (\Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(x))(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \underbrace{(\Delta(x^{-1}) \circ \Delta(x))}_{=\Delta(x^{-1}x)=\Delta(1)=\text{id}_V} (u) = u.$$

Insbesondere ist $U \cap W = 0$. Für $v \in V$ ist $g(v) \in U$, also

$$g(v - g(v)) = g(v) - g(g(v)) = g(v) - g(v) = 0,$$

d. h. $v - g(v) \in W$ und $v = g(v) + (v - g(v)) \in U + W$. Folglich ist $V = U \oplus W$. Für $w \in W$ und $y \in G$ ist

$$\begin{aligned} (g \circ \Delta(y))(w) &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(xy) \right) (w) \\ &= \left(\Delta(y) \circ \underbrace{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(y^{-1}x^{-1}) \circ h \circ \Delta(xy) \right)}_{=g} \right) (w) \\ &= (\Delta(y) \circ g)(w) = (\Delta(y))(0) = 0, \end{aligned}$$

also $(\Delta(y))(w) \in \text{Ker}(g) = W$. Folglich ist W Δ -invariant. \square

Bemerkung 1.8. Sei Δ eine Darstellung auf V , und sei $V = U \oplus W$ eine Δ -invariante Zerlegung. Dies liefert Teildarstellungen $\Gamma_U : G \rightarrow \text{GL}(U)$, $g \mapsto \Delta(g)|_U$ und $\Gamma_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$, $g \mapsto \Delta(g)|_W$. Durch Wahl einer geeigneten Basis von V hat Δ dann die Form

$$\Delta(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_U(g) & 0 \\ 0 & \Gamma_W(g) \end{pmatrix}$$

für alle $g \in G$. Somit ist $\Delta = \Gamma_U \oplus \Gamma_W$. Jede Darstellung lässt sich also als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben.

Lemma 1.9 (SCHURS Lemma). Seien $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ irreduzible Matrixdarstellungen und $0 \neq A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit $A\Gamma(g) = \Delta(g)A$ für alle $g \in G$. Dann ist $n = m$ und A ist invertierbar (insbesondere sind Δ und Γ ähnlich). Im Fall $\Delta = \Gamma$ gilt $A = \lambda 1_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Beweis. Für $g \in G$ und $v \in \text{Ker}(A)$ ist

$$(A\Delta(g))v = (\Gamma(g)A)v = 0,$$

also $(\Delta(g))v \in \text{Ker}(A)$. Daher ist $\text{Ker}(A)$ ein Δ -invarianter Untervektorraum von \mathbb{C}^m . Analog ist $\text{Bild}(A)$ ein Γ -invarianter Untervektorraum von \mathbb{C}^n . Also ist $\text{Ker}(A) = 0$ und $\text{Bild}(A) = \mathbb{C}^n$ wegen der Irreduzibilität von Δ und Γ . Folglich ist A invertierbar und $n = m$. Sei nun $\Delta = \Gamma$. Sei λ ein Eigenwert von A . Dann gilt auch $(A - \lambda 1_n)\Gamma(g) = \Delta(g)(A - \lambda 1_n)$ für alle $g \in G$. Da $A - \lambda 1_n$ nicht invertierbar ist, folgt $A - \lambda 1_n = 0$ aus dem ersten Teil des Beweises. \square

Satz 1.10. *Jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe hat Grad 1.*

Beweis. Sei G abelsch und $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine irreduzible Matrixdarstellung von G . Sei $g \in G$ fest. Für alle $h \in G$ gilt dann $\Delta(g)\Delta(h) = \Delta(gh) = \Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g)$. Nach Schurs Lemma ist also $\Delta(g) = \lambda_g 1_n$ für ein $\lambda_g \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\mathbb{C}(1, 0, \dots, 0)$ ein Δ -invarianter Untervektorraum von \mathbb{C}^n . Da Δ irreduzibel ist, folgt $n = 1$. \square

Definition 1.11. Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Matrixdarstellung. Die Abbildung $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \text{Spur } \Delta(g)$ heißt *Charakter* von Δ (und von G). Dabei ist $\chi(1) = \text{Spur } \Delta(1) = \text{Spur } 1_n = n$ der *Grad* von χ (und von Δ). Ist Δ irreduzibel (treu, ...), so bezeichnet man auch χ als *irreduzibel* (treu, ...). Die Menge der irreduziblen Charaktere von G bezeichnen wir mit $\text{Irr}(G)$.

Lemma 1.12. *Ähnliche Matrixdarstellungen haben den gleichen Charakter.*

Beweis. Seien $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ähnliche Matrixdarstellungen. Dann existiert ein $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $\Delta(g)A = A\Gamma(g)$ für alle $g \in G$. Aus der linearen Algebra weiß man, dass für quadratische Matrizen M_1, M_2 der gleichen Dimension gilt: $\text{Spur}(M_1 M_2) = \text{Spur}(M_2 M_1)$. Somit ist $\text{Spur } \Delta(g) = \text{Spur}((A\Gamma(g))A^{-1}) = \text{Spur}(A^{-1}(A\Gamma(g))) = \text{Spur } \Gamma(g)$ für alle $g \in G$. \square

Bemerkung 1.13.

- (i) Ist $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung, so kann man Δ einen Charakter zuordnen, indem man eine entsprechende Matrixdarstellung wählt. Wegen Lemma 1.12 kommt es dabei nicht auf die Wahl der Basis von V an.
- (ii) Charaktere sind die „Schatten“ von Darstellungen, d. h. man verliert einerseits Information, indem man die n^2 Einträge einer Matrix durch einen einzigen Wert ersetzt, aber andererseits bleibt genug Information, um Eigenschaften der Gruppe abzulesen.
- (iii) Offenbar stimmen Darstellungen vom Grad 1 mit ihrem Charakter überein. Man nennt diese Charaktere *linear*. Insbesondere gibt es den *trivialen* Charakter $1_G : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $1_G(g) = 1$ für $g \in G$.
- (iv) Sind Δ und Γ Darstellungen mit Charakter χ_Δ bzw. χ_Γ , so hat $\Delta \oplus \Gamma$ den Charakter $\chi_\Delta + \chi_\Gamma$. Summen von Charakteren sind also wieder Charaktere.
- (v) Für jede Darstellung $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ist $\det \Delta : G \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \det \Delta(g)$ ein Charakter vom Grad 1.

Definition 1.14.

- (i) Sei $g \in G$. Dann nennt man $C := \{hgh^{-1} : h \in G\}$ die *Konjugationsklasse* von g . Offenbar ist $\{1\}$ eine Konjugationsklasse von G . Die Menge der Konjugationsklassen von G ist $\text{Cl}(G)$. Ist $h \in C$, so sind g und h *konjugiert*. Sei $C_G(g) := \{x \in G : xg = gx\} \leq G$ der *Zentralisator* von g in G . In der Algebra 1 zeigt man $|C| = |G : C_G(g)|$.
- (ii) Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Klassenfunktion*, falls $f(g) = f(hgh^{-1})$ für alle $g, h \in G$ gilt. Klassenfunktionen sind also konstant auf Konjugationsklassen.

Lemma 1.15.

- (i) *Die Charaktere einer Gruppe G sind Klassenfunktionen.*
- (ii) *Die Menge $\text{CF}(G)$ der Klassenfunktionen bildet einen \mathbb{C} -Vektorraum durch $(\alpha + \beta)(g) := \alpha(g) + \beta(g)$ und $(a \cdot \alpha)(g) = a\alpha(g)$ für $\alpha, \beta \in \text{CF}(G)$, $a \in \mathbb{C}$ und $g \in G$. Dabei ist $\dim \text{CF}(G) = |\text{Cl}(G)|$.*

Beweis.

(i) Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ . Für $g, h \in G$ ist

$$\chi(hgh^{-1}) = \text{Spur } \Delta(hgh^{-1}) = \text{Spur}(\Delta(h)\Delta(g)\Delta(h)^{-1}) = \text{Spur } \Delta(g) = \chi(g).$$

(ii) Trivial. □

Definition 1.16. Offenbar definiert

$$(\chi, \psi)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} \quad (\chi, \psi \in \text{CF}(G)).$$

ein Skalarprodukt des \mathbb{C} -Vektorraums $\text{CF}(G)$. Auf diese Weise wird $\text{CF}(G)$ zu einem Hilbertraum.

Bemerkung 1.17. Für Charaktere χ, ψ von G ist nach Aufgabe 5 auch

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

Lemma 1.18 (SCHUR-Relationen). *Seien $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ irreduzible Matrixdarstellungen mit $\Delta(g) = (\lambda_{ij}(g))$ und $\Gamma(g) = (\theta_{ij}(g))$ für $g \in G$.*

(i) *Sind Δ und Γ nicht ähnlich, so ist*

$$\sum_{g \in G} \lambda_{ii}(g) \theta_{jj}(g^{-1}) = 0$$

für alle i, j .

(ii) *Es ist*

$$\sum_{g \in G} \lambda_{ii}(g) \lambda_{jj}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n} \delta_{ij}.$$

Beweis. Sei $E_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Matrix mit einer 1 an Position (i, j) und sonst nur Nullen. Wir setzen

$$F_{ij} := \sum_{g \in G} \Delta(g) E_{ij} \Gamma(g^{-1}).$$

Für $h \in G$ ist dann $\Delta(h) F_{ij} \Gamma(h^{-1}) = F_{ij}$, d. h. $\Delta(h) F_{ij} = F_{ij} \Gamma(h)$. Sind Δ und Γ nicht ähnlich, so folgt $F_{ij} = 0$ aus Schurs Lemma. Insbesondere ist F_{ij} an der Position (i, j) gleich 0, d. h. (i) gilt.

Sei nun $\Delta = \Gamma$. Nach Schur ist $F_{ij} = \rho_{ij} \cdot 1_n$ für ein $\rho_{ij} \in \mathbb{C}$. Für den Eintrag von F_{ij} an Position $(1, 1)$ gilt dann

$$\rho_{ij} = \sum_{g \in G} \lambda_{1i}(g) \lambda_{j1}(g^{-1}) = \sum_{h \in G} \lambda_{1i}(h^{-1}) \lambda_{j1}(h) = \sum_{h \in G} \lambda_{j1}(h) \lambda_{1i}(h^{-1}) = \rho_{11} \delta_{ij}.$$

Mit $\rho := \rho_{11}$ ($= \rho_{ii}$) gilt dann

$$n\rho = \sum_{j=1}^n \sum_{g \in G} \lambda_{ij}(g) \lambda_{ji}(g^{-1}) = \sum_{g \in G} 1 = |G|$$

wegen $\Delta(g)\Delta(g^{-1}) = 1_n$ für $g \in G$. Nun ergibt sich (ii) durch den Eintrag von F_{ij} an Position (i, j) . □

Satz 1.19 (Erste Orthogonalitätsrelation). *Für $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$ gilt*

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi = \psi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Seien Δ und Γ irreduzible Darstellungen von G mit Charakter χ bzw. ψ . Sei zunächst $\chi \neq \psi$. Nach Lemma 1.12 sind dann Δ und Γ nicht ähnlich. Wir schreiben $\Delta(g) = (\lambda_{ij}(g))$ und $\Gamma(g) = (\theta_{ij}(g))$ für $g \in G$. Dann ist $\chi(g) = \sum \lambda_{ii}(g)$ und $\psi(g) = \sum \theta_{ii}(g)$. Nach Lemma 1.18 ist also

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \lambda_{ii}(g) \theta_{jj}(g^{-1}) = 0.$$

Analog gilt

$$(\chi, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \lambda_{ii}(g) \lambda_{jj}(g^{-1}) = \frac{\chi(1)}{|G|} \frac{|G|}{\chi(1)} = 1. \quad \square$$

Bemerkung 1.20. Aus Satz 1.19 folgt leicht, dass $\text{Irr}(G)$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\text{CF}(G)$ ist. Insbesondere ist $|\text{Irr}(G)| \leq \dim_{\mathbb{C}} \text{CF}(G) = |\text{Cl}(G)| \leq |G| < \infty$.

Satz 1.21. *Zwei Darstellungen sind genau dann ähnlich, wenn sie den gleichen Charakter haben.*

Beweis. Eine Richtung ist Lemma 1.12. Seien nun Δ und Γ Darstellungen mit dem gleichen Charakter χ . Wir schreiben $\Delta = \bigoplus_{i=1}^n \Delta_i$ und $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^m \Gamma_i$ als Summen von irreduziblen Darstellungen. Dann zerlegt sich auch χ in

$$\chi = \sum_{i=1}^n \chi_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i}.$$

Nach Bemerkung 1.20 ist $n = m$ und $\chi_{\Delta_i} = \chi_{\Gamma_i}$ bei geeigneter Nummerierung. Aus Lemma 1.18 folgt nun leicht, dass Δ_i und Γ_i ähnlich sind. Sei also $A_i \in \text{GL}(\chi_{\Delta_i}(1), \mathbb{C})$ mit $A_i \Delta_i(g) = \Gamma_i(g) A_i$ für alle $g \in G$. Für

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \in \text{GL}(\chi(1), \mathbb{C})$$

gilt dann offenbar $A \Delta(g) = \Gamma(g) A$ für alle $g \in G$, d. h. Δ und Γ sind ähnlich. \square

Bemerkung 1.22. Sei ρ der reguläre Charakter von G . Nach Aufgabe 2 gilt

$$\rho(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ ist daher

$$(\rho, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \overline{\chi(g)} = \chi(1).$$

Es folgt $\rho = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi$ und $|G| = \rho(1) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2$.

Lemma 1.23. *Für eine irreduzible Darstellung Δ mit Charakter χ und $g \in C \in \text{Cl}(G)$ gilt*

$$\sum_{x \in C} \Delta(x) = \omega_{\Delta}(C) \text{id}$$

mit $\omega_{\Delta}(C) := \omega_{\chi}(C) := \frac{|C|}{\chi(1)} \chi(g)$.

Beweis. Sei $A := \sum_{x \in C} \Delta(x)$. Für $y \in G$ gilt $\Delta(y) A \Delta(y^{-1}) = \sum_{x \in C} \Delta(y x y^{-1}) = A$. Aus Schurs Lemma folgt $A = \omega_{\Delta}(C) \text{id}$ für ein $\omega_{\Delta}(C) \in \mathbb{C}$. Weiter ist $\omega_{\Delta}(C) \chi(1) = \text{Spur } A = \sum_{x \in C} \chi(x) = |C| \chi(g)$. \square

Satz 1.24 (Zweite Orthogonalitätsrelation). *Für $g, h \in G$ gilt*

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g) \overline{\chi(h)} = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{falls } g \text{ und } h \text{ konjugiert sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $g \in C \in \text{Cl}(G)$, $h^{-1} \in D \in \text{Cl}(G)$ und $\Delta_\chi : G \rightarrow \text{GL}(\chi(1), \mathbb{C})$ eine irreduzible Matrixdarstellung mit Charakter χ . Nach Lemma 1.23 gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g)\chi(h^{-1})1_n &= \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \left(\frac{\chi(1)}{|C|} \sum_{x \in C} \Delta_\chi(x) \right) \left(\frac{\chi(1)}{|D|} \sum_{y \in D} \Delta_\chi(y) \right) \\ &= \frac{1}{|C||D|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 \sum_{x \in C} \sum_{y \in D} \Delta_\chi(xy). \end{aligned}$$

Für $x, y \in E \in \text{Cl}(G)$ ist $|\{(a, b) \in C \times D : ab = x\}| = |\{(a, b) \in C \times D : ab = y\}| =: \alpha_E$, denn schreibt man $y = zxz^{-1}$, so liefert die Abbildung $(a, b) \mapsto (zaz^{-1}, zbz^{-1})$ eine Bijektion zwischen den Mengen. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g)\chi(h^{-1})1_n &= \frac{1}{|C||D|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 \sum_{E \in \text{Cl}(G)} \alpha_E \underbrace{\sum_{z \in E} \Delta_\chi(z)}_{= \omega_{\Delta_\chi}(E)1_n = \frac{|E|}{\chi(1)} \chi(z)} \\ &= \frac{1}{|C||D|} \sum_{E \in \text{Cl}(G)} |E| \alpha_E \underbrace{\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)\chi(z)}_{= \rho(z)} 1_n = \frac{\alpha_{\{1\}}|G|}{|C||D|} 1_n, \end{aligned}$$

wobei ρ der reguläre Charakter von G ist. Die Konjugationsklasse von h ist offenbar D^{-1} . Sind g und h nicht konjugiert, so ist also $C \cap D^{-1} = \emptyset$ und $\alpha_{\{1\}} = 0$. Anderenfalls ist $\alpha_{\{1\}} = |C| = |D|$ und die Behauptung folgt wegen $\frac{|G|}{|C|} = |C_G(g)|$. \square

Satz 1.25. $\text{Irr}(G)$ ist eine Orthonormalbasis von $\text{CF}(G)$. Insbesondere ist $\boxed{|\text{Irr}(G)| = |\text{Cl}(G)| =: k(G)}$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\text{Irr}(G)$ linear unabhängig ist (Bemerkung 1.20). Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation ist für $g \in C \in \text{Cl}(G)$ andererseits

$$\varphi_C := \frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g^{-1})\chi$$

die charakteristische Funktion auf C (d. h. $\varphi_C(x)$ ist 1 falls $x \in C$ und sonst 0). Da die charakteristischen Funktionen eine Basis von $\text{CF}(G)$ bilden, ist $\text{Irr}(G)$ auch ein Erzeugendensystem. Die Orthonormalität folgt aus der ersten Orthogonalitätsrelation. \square

Bemerkung 1.26.

(i) Jede Klassenfunktion $f \in \text{CF}(G)$ lässt sich also eindeutig in der Form

$$f = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi$$

mit $a_\chi \in \mathbb{C}$ schreiben. Ist $a_\chi \in \mathbb{Z}$ für alle $\chi \in \text{Irr}(G)$, so ist f ein *virtueller Charakter* von G (oder *verallgemeinerter Charakter*). Gilt zusätzlich $a_\chi \geq 0$ für alle $\chi \in \text{Irr}(G)$ und $a_\psi > 0$ für mindestens ein $\psi \in \text{Irr}(G)$, so ist f ein Charakter nach Bemerkung 1.13(iv). Umgekehrt hat jeder Charakter von G die Form $\psi = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi$ mit $a_\chi \in \mathbb{N}_0$. Ist $a_\chi = (\psi, \chi)_G > 0$, so nennt man χ einen *irreduziblen Bestandteil* von ψ mit *Vielfachheit* a_χ . Außerdem gilt $(\psi, \psi)_G = \sum a_\chi^2$. Insbesondere ist ψ genau dann irreduzibel, falls $(\psi, \psi)_G = 1$ gilt.

(ii) Im Allgemeinen kennt man keine kanonische Bijektion zwischen $\text{Cl}(G)$ und $\text{Irr}(G)$.

2 Charaktertafeln

Bemerkung 2.1. Sei $g_1, \dots, g_k \in G$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G , und sei $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$. Die $k \times k$ -Matrix $C := (\chi_i(g_j))_{i,j}$ heißt *Charaktertafel* von G . Natürlich hängt C von der Reihenfolge der Elemente und Charaktere ab. In der Regel wählt man $g_1 = 1$, $\chi_1 = 1_G$ und $\chi_1(1) \leq \chi_2(1) \leq \dots \leq \chi_k(1)$. In diesem Kapitel wollen wir C für einige Gruppen berechnen. Die erste Orthogonalitätsrelation lässt sich in der Form

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{|C_G(g_i)|} \chi_r(g_i) \overline{\chi_s(g_i)} = \delta_{rs}$$

schreiben. Dies betrifft also die Zeilen von C . Die zweite Orthogonalitätsrelation besagt, dass die Spalten von C paarweise orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts von \mathbb{C}^k sind. Insbesondere ist C invertierbar.

Bemerkung 2.2. Seien G und H endliche Gruppen und $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\Gamma : H \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ Matrixdarstellungen. Für $g \in G$ und $h \in H$ schreiben wir $\Delta(g) = (\alpha_{ij}(g))$ und $\Gamma(h) = (\beta_{ij}(h))$. Sei $f : \{1, \dots, nm\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, $i \mapsto (i_1, i_2)$ eine Bijektion. Für $(g, h) \in G \times H$ definieren wir eine Matrix $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$ durch

$$(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) = (\alpha_{i_1 j_1}(g) \beta_{i_2 j_2}(h))_{i,j=1}^{nm} \quad (\text{Kronecker-Produkt}).$$

Satz 2.3. Die Abbildung $\Delta \otimes \Gamma : G \times H \rightarrow \text{GL}(nm, \mathbb{C})$ ist eine Darstellung mit Grad nm . Für die entsprechenden Charaktere gilt $\chi_{\Delta \otimes \Gamma} = \chi_\Delta \chi_\Gamma$, wobei $(\chi_\Delta \chi_\Gamma)(g, h) = \chi_\Delta(g) \chi_\Gamma(h)$ für $g \in G$ und $h \in H$.

Beweis. Für $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ gilt

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \Gamma)(g_1 g_2, h_1 h_2) &= (\alpha_{i_1 j_1}(g_1 g_2) \beta_{i_2 j_2}(h_1 h_2))_{i,j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{i_1 k}(g_1) \alpha_{k j_1}(g_2) \beta_{i_2 l}(h_1) \beta_{l j_2}(h_2) \right)_{i,j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{i_1 k}(g_1) \beta_{i_2 l}(h_1) \alpha_{k j_1}(g_2) \beta_{l j_2}(h_2) \right)_{i,j} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{nm} \alpha_{i_1 r_1}(g_1) \beta_{i_2 r_2}(h_1) \alpha_{r_1 j_1}(g_2) \beta_{r_2 j_2}(h_2) \right)_{i,j} \\ &= (\Delta \otimes \Gamma)(g_1, h_1) (\Delta \otimes \Gamma)(g_2, h_2). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) (\Delta \otimes \Gamma)(g^{-1}, h^{-1}) = (\Delta \otimes \Gamma)(1, 1) = (\alpha_{i_1 j_1}(1) \beta_{i_2 j_2}(1))_{i,j} = 1_{nm}$ und $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) \in \text{GL}(nm, \mathbb{C})$. Damit ist gezeigt, dass $\Delta \otimes \Gamma$ eine Darstellung ist. Für den Charakter gilt

$$\chi_{\Delta \otimes \Gamma}(g, h) = \sum_{i=1}^{nm} \alpha_{i_1 i_1}(g) \beta_{i_2 i_2}(h) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kk}(g) \beta_{ll}(h) = \chi_\Delta(g) \chi_\Gamma(h). \quad \square$$

Bemerkung 2.4.

- (i) Nach Satz 1.21 hängt die Ähnlichkeitsklasse von $\Delta \otimes \Gamma$ nicht von der Wahl der Bijektion f ab.
- (ii) Im Fall $H = G$ erhält man eine Darstellung von G durch $g \mapsto (\Delta \otimes \Gamma)(g, g)$. Diese wird ebenfalls mit $\Delta \otimes \Gamma$ bezeichnet. Für Charaktere χ, ψ von G ist also auch das Produkt $\chi\psi$ mit $(\chi\psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$ ein Charakter von G . Für $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$ ist $\chi\psi$ nicht unbedingt irreduzibel.

Satz 2.5. Für endliche Gruppen G, H ist $\text{Irr}(G \times H) = \{\chi\psi : \chi \in \text{Irr}(G), \psi \in \text{Irr}(H)\}$.

Beweis. Sei $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ und $\text{Irr}(H) = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\chi_i \psi_j, \chi_k \psi_l)_{G \times H} &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \chi_i(g) \psi_j(h) \overline{\chi_k(g) \psi_l(h)} \\ &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_k(g)} \right) \left(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h) \overline{\psi_l(h)} \right) = \delta_{ik} \delta_{jl}. \end{aligned}$$

Also sind die Charaktere $\chi_i \psi_j$ irreduzibel und paarweise verschieden. Wegen

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\chi_i \psi_j)(1)^2 = \sum_{i=1}^n \chi_i(1)^2 \sum_{j=1}^m \psi_j(1)^2 = |G| |H| = |G \times H|$$

hat man alle irreduziblen Charaktere von $G \times H$ gefunden. \square

Bemerkung 2.6. Sei G zyklisch der Ordnung n (wir schreiben $G \cong C_n$). Nach Aufgabe 1 ist die Charaktertafel von G durch $(e^{\frac{2\pi i k l}{n}})_{k, l=0}^{n-1}$ gegeben ($i = \sqrt{-1}$). Aus der Algebra 1/2 weiß man, dass jede abelsche Gruppe G das direkte Produkt zyklischer Gruppen ist (für einen elementaren Beweis siehe Theorem 2.1.3 in Kurzweil-Stellmacher, „Theorie der endlichen Gruppen“). Mit Satz 2.5 lässt sich also leicht die Charaktertafel von G berechnen.

Beispiel 2.7. Sei $G := \{1, x, y, z (= xy)\} \cong C_2 \times C_2 = C_2^2$ die Kleinsche Vierergruppe mit $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_4\}$. Dann ist

C_2^2	1	x	y	z
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

die Charaktertafel von G .

Definition 2.8. Für $x, y \in G$ ist $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ der *Kommutator* von x und y . Wir setzen

$$G' := \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$$

(die kleinste Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält). Dann heißt G' *Kommutatorgruppe* von G .

Bemerkung 2.9. Für $\alpha \in \text{Aut}(G)$ und $x, y \in G$ ist offenbar $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)] \in G'$. Insbesondere ist $G' \trianglelefteq G$ (wähle $\alpha \in \text{Inn}(G)$). Für $xG', yG' \in G/G'$ ist

$$xG' yG' = xy \underbrace{[y^{-1}, x^{-1}]}_{\in G'} G' = yG' xG',$$

d. h. G/G' ist abelsch. Ist umgekehrt $N \trianglelefteq G$ mit G/N abelsch, so gilt $[x, y]N = xNyN(xN)^{-1}(yN)^{-1} = N$ für $x, y \in G$, d. h. $G' \subseteq N$.

Satz 2.10. Die Charaktere von G vom Grad 1 sind gerade die Inflationen von $\text{Irr}(G/G')$.

Beweis. Sei χ ein Charakter von G vom Grad 1. Dann ist $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus. Insbesondere ist $G/\text{Ker } \chi$ als Untergruppe von \mathbb{C}^\times abelsch, d. h. $G' \subseteq \text{Ker } \chi$. Deflation liefert also ein $\psi \in \text{Irr}(G/G')$ und χ ist die Inflation von ψ .

Umgekehrt hat die Inflation jedes $\chi \in \text{Irr}(G/G')$ Grad 1 wegen Satz 1.10. \square

Beispiel 2.11. Sei $G = A_4$ die alternierende Gruppe vom Grad 4. Bekanntlich ist die Kleinsche Vierergruppe $V := \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$ normal in G . Wegen $|G/V| = 3$ ist G/V abelsch und $G' \subseteq V$. Da G nicht abelsch ist, muss also $G' = V$ gelten. Für $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ gilt also o. B. d. A. $\chi_1(1) = \chi_2(1) = \chi_3(1) = 1$ und $\chi_i(1) > 1$ für $i \geq 4$. Außerdem ist $12 = |G| = \sum_{i=1}^k \chi_i(1)^2 = 3 + \sum_{i=4}^k \chi_i(1)^2$. Es folgt $k = 4$ und $\chi_4(1) = 3$. Somit hat G auch 4 Konjugationsklassen. Aus Ordnungsgründen sind die Elemente 1, $(1, 2)(3, 4)$ und $(1, 2, 3)$

paarweise nicht konjugiert. In der abelschen Gruppe G/G' sind auch $(1, 2, 3)G'$ und $(1, 3, 2)G' = (1, 2, 3)^{-1}G'$ nicht konjugiert. Somit können auch $(1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ nicht in G konjugiert sein. Also ist $1, (1, 2)(3, 4), (1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G . Ein Teil der Charaktertafel ergibt sich nun wie folgt

A_4	1	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	σ	σ^{-1}
χ_3	1	1	σ^{-1}	σ
χ_4	3			

$$\sigma := e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Die letzte Zeile ergibt sich aus der zweiten Orthogonalitätsrelation:

A_4	1	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	σ	σ^{-1}
χ_3	1	1	σ^{-1}	σ
χ_4	3	-1	0	0

Lemma 2.12. Sei $g \in G$. Für eine Darstellung Δ von G mit Charakter χ gilt

- (i) $|\chi(g)| \leq \chi(1)$.
- (ii) $|\chi(g)| = \chi(1) \Leftrightarrow \Delta(g) \in \mathbb{C}^\times \text{id}$.
- (iii) $\chi(g) = \chi(1) \Leftrightarrow g \in \text{Ker}(\Delta)$.

Beweis. Sei $n := \chi(1)$, und seien $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $\Delta(g)$. Wegen $(\Delta(g))^{|g|} = \Delta(g^{|g|}) = \Delta(1) = 1_n$ sind die ϵ_i Einheitswurzeln. Wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Vektoren $v := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ und $w := (1, \dots, 1)$ an:

$$|\chi(g)| = |\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n| = |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| = \sqrt{n} \sqrt{n} = n.$$

Dies zeigt (i). Gilt Gleichheit, so sind v und w linear abhängig und es folgt $\epsilon := \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n$. Da $\Delta(g)$ diagonalisierbar ist (Aufgabe 4), ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwert ϵ gleich n , d. h. $\Delta(g) = \epsilon \text{id}$. Ist umgekehrt $\Delta(g) \in \mathbb{C}^\times \text{id}$, so folgt sicher $|\chi(g)| = \chi(1)$. Ist sogar $\chi(g) = \chi(1)$, so ist offensichtlich $\epsilon = 1$ und $g \in \text{Ker}(\Delta)$. Die Umkehrung ist hier auch klar. \square

Definition 2.13. Für eine Darstellung Δ mit Charakter χ setzen wir $\text{Ker}(\chi) := \text{Ker}(\Delta)$ und $Z(\chi) := Z(\Delta) := \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}$. Man nennt $Z(\chi)$ das Zentrum von χ (bzw. Δ).

Satz 2.14. Für jeden Charakter χ von G sind $\text{Ker}(\chi)$ und $Z(\chi)$ Normalteiler von G . Dabei ist $\text{Ker}(\chi) \leq Z(\chi)$ und $Z(\chi)/\text{Ker}(\chi)$ ist zyklisch. Ist $\chi \in \text{Irr}(G)$, so ist $Z(\chi)/\text{Ker}(\chi) = Z(G/\text{Ker}(\chi))$ und $Z(G) \subseteq Z(\chi)$.

Beweis. Sicher ist $\text{Ker}(\chi) \trianglelefteq G$ und $\text{Ker}(\chi) \subseteq Z(\chi)$. Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ . Offenbar ist $\mathbb{C}^\times \text{id}_V \subseteq Z(\text{GL}(V))$ und damit $\mathbb{C}^\times \text{id}_V \trianglelefteq \text{GL}(V)$. Somit ist auch $Z(\chi) = \Delta^{-1}(\mathbb{C}^\times \text{id}_V) \trianglelefteq G$. Nach dem Homomorphiesatz ist außerdem $Z(\chi)/\text{Ker}(\chi)$ zu einer endlichen Untergruppe H von $\mathbb{C}^\times \text{id}_V \cong \mathbb{C}^\times$ isomorph. Offenbar besteht H genau aus den $|H|$ -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C} . Insbesondere ist H zyklisch (in der Algebra 1 beweist man dies für beliebige Körper).

Sei nun $\chi \in \text{Irr}(G)$. Nach Deflation können wir $\text{Ker}(\chi) = 1$ und $G \leq \text{GL}(V)$ annehmen (dadurch ändert sich $Z(\chi)$ nicht). Offenbar ist dann

$$Z(\chi) \subseteq \mathbb{C}^\times \text{id}_V \cap G \subseteq Z(\text{GL}(V)) \cap G \subseteq Z(G).$$

Für $x \in Z(G)$ gilt umgekehrt $\Delta(g)\Delta(x) = \Delta(gx) = \Delta(xg) = \Delta(x)\Delta(g)$ für alle $g \in G$. Schurs Lemma zeigt $\Delta(x) \in \mathbb{C}^\times \text{id}_V$ und damit $x \in Z(\chi)$.

Die letzte Aussage folgt aus $Z(G)\text{Ker}(\chi)/\text{Ker}(\chi) \leq Z(G/\text{Ker}(\chi))$. \square

Bemerkung 2.15. Auf diese Weise kann man häufig Normalteiler konstruieren, denn jeder Normalteiler ist Kern eines Charakters (Aufgabe 9).

3 Ganz-algebraische Zahlen

Definition 3.1. Eine Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ heißt *ganz-algebraisch*, falls sie Nullstelle eines normierten, ganzzahligen Polynoms ist, d. h. es existieren Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ mit $\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + a_1\zeta + a_0 = 0$.

Beispiel 3.2.

- (i) Ganze Zahlen sind offenbar ganz-algebraisch.
- (ii) Einheitswurzeln sind ganz-algebraisch als Nullstellen von Polynomen der Form $X^n - 1$.

Lemma 3.3. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ganz-algebraisch, so auch $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$. (Die ganz-algebraischen Zahlen bilden also einen Ring.)

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \alpha^n &= a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0, \\ \beta^m &= b_{m-1}\beta^{m-1} + \dots + b_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{Z}$. Sei $S := \{\alpha^i \beta^j : i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1\}$ und $\gamma := \alpha + \beta$ (bzw. $\alpha\beta$). Für $s \in S$ existieren dann Zahlen $c_{st} \in \mathbb{Z}$ mit $\gamma s = \sum_{t \in S} c_{st} t$ (benutze (3.1)). Für $A := (c_{st})_{s,t \in S} \in \mathbb{Z}^{nm \times nm}$ und $v := (s : s \in S)$ gilt $Av = \gamma v$. Also ist γ Nullstelle des normierten, ganzzahligen Polynoms $\det(X1_{nm} - A)$. \square

Bemerkung 3.4. Ist χ ein Charakter von G , so ist $\chi(g)$ als Summe von Einheitswurzeln (siehe zum Beispiel Beweis von Lemma 2.12) ganz-algebraisch für $g \in G$.

Lemma 3.5. Ist $\zeta \in \mathbb{Q}$ ganz-algebraisch, so ist $\zeta \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $\zeta = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ und $\text{ggT}(r, s) = 1$. Nach Voraussetzung existieren $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{r^n}{s^n} = \frac{a_{n-1}r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + \frac{a_1 r}{s} + a_0.$$

Umstellen ergibt

$$r^n = s(a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}).$$

Also ist $s \mid r^n$. Wegen $\text{ggT}(r, s) = 1$ folgt $s = \pm 1$ und $\zeta \in \mathbb{Z}$. \square

Lemma 3.6. Für $C \in \text{Cl}(G)$ und $\chi \in \text{Irr}(G)$ ist $\omega_\chi(C)$ ganz-algebraisch.

Beweis. Sei Δ eine Darstellung mit Charakter χ , und sei Γ die reguläre Darstellung. Da Δ ein irreduzibler Bestandteil von Γ ist, können wir nach geeigneter Basiswahl annehmen, dass $\Gamma(x)$ die Gestalt

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} \Delta(x) & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

für $x \in G$ hat. Sei $v := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{|G|}$. Nach Lemma 1.23 ist dann

$$\sum_{x \in C} \Gamma(x)v = \omega_\Delta(C)v.$$

Folglich ist $\omega_\Delta(C)$ ein Eigenwert von $A := \sum_{x \in C} \Gamma(x)$. Bekanntlich ist $\Gamma(x)$ zu einer Permutationsmatrix ähnlich (siehe Aufgabe 2). Somit ist A zu einer ganzzahligen Matrix \tilde{A} ähnlich. Offenbar ist $\omega_\Delta(C)$ auch Eigenwert von \tilde{A} . Somit ist $\omega_\Delta(C)$ als Nullstelle des normierten, ganzzahligen Polynoms $\det(X1_{|G|} - \tilde{A})$ ganz-algebraisch. \square

Satz 3.7. Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ ist $\boxed{|\chi(1)| \mid |G|}$.

Beweis. Seien $g_1, \dots, g_k \in G$ Repräsentanten für die Konjugationsklassen C_1, \dots, C_k von G . Nach der ersten Orthogonalitätsrelation ist dann

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi(x)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{i=1}^k |C_i| \chi(g_i) \overline{\chi(g_i)} = \sum_{i=1}^k \omega_\chi(C_i) \chi(g_i^{-1}).$$

Nach Lemma 3.6 ist $\frac{|G|}{\chi(1)}$ ganz-algebraisch. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.5. \square

Satz 3.8. Sei $\chi \in \text{Irr}(G)$ und $g \in C \in \text{Cl}(G)$ mit $\text{ggT}(\chi(1), |C|) = 1$. Dann ist $g \in Z(\chi)$ oder $\chi(g) = 0$.

Beweis. Sei $\alpha := \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$. Wegen $\text{ggT}(\chi(1), |C|) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a\chi(1) + b|C| = 1$. Mit $\omega_\chi(C)$ und $\chi(g)$ ist auch

$$\alpha = \frac{\chi(g)}{\chi(1)} (a\chi(1) + b|C|) = a\chi(g) + b\omega_\chi(C)$$

ganz-algebraisch. Sei $n := |\langle g \rangle|$ und $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$. Als Summe n -ter Einheitswurzeln ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\zeta)$. Sei \mathcal{G} die Galoisgruppe der Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$. Für $\sigma \in \mathcal{G}$ ist auch $\sigma(\alpha)$ ganz-algebraisch, denn α und $\sigma(\alpha)$ sind Nullstellen des gleichen ganzzahligen Polynoms. Daher ist auch $\beta := \prod_{\sigma \in \mathcal{G}} \sigma(\alpha)$ ganz-algebraisch. Wegen $\sigma(\beta) = \beta$ für alle $\sigma \in \mathcal{G}$ liegt β im Fixkörper von \mathcal{G} , d. h. $\beta \in \mathbb{Q}$ (Galoistheorie). Nach Lemma 3.5 ist $\beta \in \mathbb{Z}$. Im Fall $g \notin Z(\chi)$ ist $|\alpha| < 1$ (Lemma 2.12). Mit $\chi(g)$ ist auch $\sigma(\chi(g))$ Summe von $m := \chi(1)$ vielen n -ten Einheitswurzeln $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$. Es folgt $|\sigma(\chi(g))| = |\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m| \leq |\epsilon_1| + \dots + |\epsilon_m| = m$ und $|\sigma(\alpha)| \leq 1$ für $\sigma \in \mathcal{G}$. Folglich ist $|\beta| < 1$, d. h. $\beta = 0$. Also ist $\alpha = 0$ und $\chi(g) = 0$. \square

Satz 3.9. Sei G einfach und nichtabelsch, $C \in \text{Cl}(G)$ und $|C|$ Potenz einer Primzahl p . Dann ist $C = \{1\}$.

Beweis. Wir nehmen $C \neq \{1\}$ an und wählen $g \in C$ und $\chi \in \text{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$. Da G einfach ist, ist $\text{Ker}(\chi) = 1$. Da G nichtabelsch ist, ist auch $Z(\chi) = 1$ (Satz 2.14). Im Fall $p \nmid \chi(1)$ ist also $\chi(g) = 0$ nach Satz 3.8. Daher ist

$$\sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(G), \\ p \mid \chi(1)}} \frac{\chi(1)}{p} \chi(g) = \frac{1}{p} \sum_{1_G \neq \chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi(g) = \frac{1}{p} \left(\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi(g) - 1_G(1) 1_G(g) \right) = -\frac{1}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

ganz-algebraisch. Widerspruch. \square

Satz 3.10 (BURNSIDE). Sei $|G| = p^a q^b$ mit Primzahlen p, q und $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dann ist G auflösbar.

Beweis. (Induktion nach $|G|$) O. B. d. A. sei $G \neq 1$. Sei N ein maximaler Normalteiler von G . Ist $N \neq 1$, so sind N und G/N nach Induktion auflösbar, also auch G . Daher sei $N = 1$, d. h. G ist einfach und o. B. d. A. nichtabelsch. Sei $P \neq 1$ eine Sylowgruppe von G , $g \in Z(P) \setminus \{1\}$ und C die Konjugationsklasse von g . Dann ist $|C| = |G : C_G(g)| \mid |G : P| = q^b$ eine Primzahlpotenz. Nach Satz 3.9 ist $C = \{1\}$. Widerspruch. \square

Satz 3.11. Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ ist $\chi(1) \mid |G : Z(\chi)|$.

Beweis. Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ein Darstellung mit Charakter χ . Nach Übergang zur Deflation $G/\text{Ker}(\chi) \rightarrow \text{GL}(V)$ können wir $\text{Ker}(\chi) = 1$ annehmen (beachte: $|G : Z(\chi)| = |G/\text{Ker}(\chi) : Z(\chi)/\text{Ker}(\chi)|$). Nach Satz 2.14 ist $Z(\chi) = Z(G)$ und $\Delta(z) = \lambda(z) \text{id}_V$ mit $\lambda(z) \in \mathbb{C}$ für $z \in Z(G)$. Man sieht leicht, dass die Abbildung $Z(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto \lambda(z)$ ein Homomorphismus ist. Für $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\Delta_m := \underbrace{\Delta \otimes \dots \otimes \Delta}_m$$

eine irreduzible Darstellung von $G^m := G \times \dots \times G$ (Satz 2.5). Für $z_1, \dots, z_m \in Z(G)$ gilt $\Delta_m(z_1, \dots, z_m) = \lambda(z_1 \dots z_m) \text{id}$ (siehe Bemerkung 2.2). Offenbar ist $H := \{(z_1, \dots, z_m) \in Z(G)^m : z_1 \dots z_m = 1\} \trianglelefteq G^m$, $|H| =$

$|Z(G)|^{m-1}$ und $H \subseteq \text{Ker}(\Delta_m)$. Man kann also Δ_m mit der Deflation nach G^m/H identifizieren. Nach Satz 3.7 ist dann

$$\chi(1)^m \mid |G^m/H| = \frac{|G|^m}{|Z(G)|^{m-1}}.$$

Wir setzen

$$\alpha := \frac{\chi(1)}{\text{ggT}(\chi(1), |G : Z(G)|)}.$$

Dann ist

$$\alpha^m = \frac{\chi(1)^m}{\text{ggT}(\chi(1)^m, |G : Z(G)|^m)} \leq \frac{\chi(1)^m |Z(G)|}{\text{ggT}(\chi(1)^m, |G : Z(G)|^m |Z(G)|)} = |Z(G)|$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Also ist $\alpha = 1$ und $\chi(1) \mid |G : Z(G)|$. □

4 Cliffordtheorie

Bemerkung 4.1. Für $H \leq G$ und $\varphi \in \text{CF}(G)$ ist offenbar die Einschränkung (Restriktion) $\varphi_H \in \text{CF}(H)$. Wir werden nun umgekehrt aus $\varphi \in \text{CF}(H)$ eine Klassenfunktion auf G konstruieren.

Definition 4.2. Für $H \leq G$ und $\varphi \in \text{CF}(H)$ sei

$$\varphi^G : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} \varphi(gxg^{-1}).$$

Man nennt φ^G die *Induktion* von φ .

Satz 4.3. Für $\varphi \in \text{CF}(H)$ ist $\varphi^G \in \text{CF}(G)$.

Beweis. Für $x, y \in G$ ist

$$\varphi^G(yxy^{-1}) = \sum_{\substack{g \in G, \\ gyxy^{-1}g^{-1} \in H}} \varphi(gyxy^{-1}g^{-1}) = \sum_{\substack{h \in G, \\ h x h^{-1} \in H}} \varphi(h x h^{-1}) = \varphi^G(x). \quad \square$$

Bemerkung 4.4.

- (i) Man sieht leicht, dass die Induktion eine lineare Abbildung von $\text{CF}(H)$ nach $\text{CF}(G)$ ist.
- (ii) Für $H \leq G$, $\varphi \in \text{CF}(H)$ und $x \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi^G(x) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ g^{-1}xg \in H}} \varphi(g^{-1}xg) = \frac{1}{|H|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{-1}g^{-1}xgh \in H}} \varphi(h^{-1}g^{-1}xgh) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{gH \in G/H, h \in H, \\ g^{-1}xg \in H}} \varphi(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \varphi(g^{-1}xg). \end{aligned}$$

Dies ist nützlich für die praktische Berechnung.

Satz 4.5.

- (i) Für $K \leq H \leq G$ und $\varphi \in \text{CF}(K)$ ist $(\varphi^H)^G = \varphi^G$. Die Induktion von Klassenfunktionen ist also transitiv.
- (ii) Für $\chi \in \text{CF}(G)$ und $\varphi \in \text{CF}(H)$ ist $\chi\varphi^G = (\chi_H\varphi)^G$ und $(\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H$.

Beweis.

- (i) Nach Bemerkung 4.4(ii) gilt

$$(\varphi^H)^G(x) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \varphi^H(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \sum_{\substack{hK \in H/K, \\ g^{-1}xghK = hK}} \varphi(h^{-1}g^{-1}xgh) = \sum_{\substack{aK \in G/K, \\ xaK = aK}} \varphi(a^{-1}xa) = \varphi^G(x)$$

für $x \in G$.

(ii) Wie in (i) gilt

$$(\chi\varphi^G)(x) = \chi(x) \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \varphi(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} (\chi\varphi)(g^{-1}xg) = (\chi_H\varphi)^G(x)$$

für $x \in G$ und

$$\begin{aligned} (\chi, \varphi^G)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \overline{\varphi(g^{-1}xg)} = \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\substack{x \in G, \\ g^{-1}xg \in H}} \chi(g^{-1}xg) \overline{\varphi(g^{-1}xg)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{h \in H} \chi(h) \overline{\varphi(h)} = \frac{|G/H|}{|G|} \sum_{h \in H} \chi(h) \overline{\varphi(h)} = (\chi_H, \varphi)_H. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 4.6. Die Gleichung $(\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H$ heißt *Frobenius-Reziprozität*. Sie besagt, dass Restriktion und Induktion zueinander adjungierte Abbildungen zwischen $\text{CF}(G)$ und $\text{CF}(H)$ sind.

Satz 4.7. Für einen Charakter φ von $H \leq G$ ist φ^G ein Charakter von G vom Grad $|G:H|\varphi(1)$.

Beweis. Wir schreiben $\varphi^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi$ mit $a_\chi \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$a_\chi = (\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H \in \mathbb{N}_0,$$

denn χ_H ist ein Charakter von H . Also ist φ^G ein Charakter von G . Offenbar ist auch $\varphi^G(1) = |G:H|\varphi(1)$. \square

Beispiel 4.8.

- (i) 1_1^G ist der reguläre Charakter von G . Insbesondere ist φ^G nicht unbedingt irreduzibel, falls φ irreduzibel ist. Ist φ reduzibel, so muss auch φ^G reduzibel sein wegen der Linearität der Induktion.
- (ii) Sei $H := \langle (1, 2, 3) \rangle$ und $G := S_3$. Sei φ ein nichttrivialer Charakter von H vom Grad 1. Dann ist $\varphi^G(1) = 2$, $\varphi^G((1, 2)) = 0$, $\varphi^G((1, 2, 3)) = -1$. Insbesondere ist $\varphi^G \in \text{Irr}(G)$.

Definition 4.9. Sei $H \leq G$, $\varphi \in \text{CF}(H)$ und $g \in G$. Dann ist ${}^g\varphi \in \text{CF}(gHg^{-1})$ mit ${}^g\varphi(x) := \varphi(g^{-1}xg)$ für $x \in gHg^{-1}$. Wir nennen $G_\varphi := \{g \in G : {}^g\varphi = \varphi\} \leq G$ die *Trägheitsgruppe* von φ . Außerdem sei

$$\text{Irr}(G|\varphi) := \{\chi \in \text{Irr}(G) : (\chi_H, \varphi)_H \neq 0\}.$$

Bemerkung 4.10.

- (i) Offenbar ist $H \leq G_\varphi \leq N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ ($N_G(H)$ ist der *Normalisator* von H in G).

(ii) Wie üblich ist

$${}^g\varphi = {}^h\varphi \iff h^{-1}g \in G_\varphi \iff gG_\varphi = hG_\varphi$$

für $g, h \in G$.

- (iii) Sei $\Delta : H \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ . Für $g \in G$ ist dann offenbar ${}^g\Delta : gHg^{-1} \rightarrow \text{GL}(V)$, $x \mapsto \Delta(g^{-1}xg)$ eine Darstellung von gHg^{-1} mit Charakter ${}^g\chi$.

- (iv) Für $\varphi, \psi \in \text{CF}(H)$ und $g \in G$ ist $({}^g\varphi, {}^g\psi)_{gHg^{-1}} = (\varphi, \psi)_H$, denn

$$\frac{1}{|gHg^{-1}|} \sum_{x \in gHg^{-1}} {}^g\varphi(x) \overline{{}^g\psi(x)} = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \varphi(x) \overline{\psi(x)}.$$

- (v) Für $K \leq H \leq G$, $\varphi \in \text{CF}(H)$ und $g \in G$ ist $({}^g\varphi_K) = ({}^g\varphi)_{gKg^{-1}}$.

- (vi) Für $N \trianglelefteq G$ und $\chi \in \text{Irr}(N)$ ist $({}^g\chi, {}^g\chi)_N = (\chi, \chi)_N = 1$ und ${}^g\chi \in \text{Irr}(N)$. Man sagt, χ und ${}^g\chi$ sind *konjugiert*.

Satz 4.11. Sei $N \trianglelefteq G$, $\chi \in \text{Irr}(G)$ und $\psi \in \text{Irr}(N)$ mit $e := (\chi_N, \psi)_N \neq 0$. Dann ist

$$\chi_N = e \sum_{gG_\psi \in G/G_\psi} {}^g\psi.$$

Beweis. Nach Frobenius-Reziprozität ist χ ein Bestandteil von ψ^G . Daher ist χ_N ein Bestandteil von $(\psi^G)_N$. Für $x \in N$ gilt

$$\psi^G(x) = \sum_{\substack{gN \in G/N, \\ xgN = gN}} \psi(gxg^{-1}) = \sum_{gN \in G/N} {}^g\psi(x)$$

nach Bemerkung 4.4 Also ist jeder irreduzible Bestandteil von χ_N zu ψ konjugiert. Für $g \in G$ gilt

$$(\chi_N, {}^g\psi)_N = ({}^{g^{-1}}\chi_N, \psi)_N = (({}^{g^{-1}}\chi)_N, \psi)_N = (\chi_N, \psi)_N = e$$

nach Bemerkung 4.10. Dies liefert die Behauptung. \square

Definition 4.12. In der Situation von Satz 4.11 nennt man e den *Verzweigungsindex* von χ bzgl. N . Man kann zeigen, dass $e \mid |G : N|$ gilt (ohne Beweis).

Satz 4.13 (CLIFFORD-Korrespondenz). Für $N \trianglelefteq G$ und $\psi \in \text{Irr}(N)$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Irr}(G_\psi | \psi) &\rightarrow \text{Irr}(G | \psi), \\ \chi &\mapsto \chi^G \end{aligned}$$

eine Bijektion mit $(\chi_N, \psi)_N = ((\chi^G)_N, \psi)_N$.

Beweis. Sei $\chi \in \text{Irr}(G_\psi | \psi)$ und sei φ ein irreduzibler Bestandteil von χ^G . Wir zeigen zunächst $\varphi \in \text{Irr}(G | \psi)$. Wir schreiben $\varphi_{G_\psi} := \sum_{\tau \in \text{Irr}(G_\psi)} a_\tau \tau$ mit $a_\tau \geq 0$ und $a_\chi = (\varphi_{G_\psi}, \chi)_{G_\psi} = (\varphi, \chi^G)_G \geq 1$. Nach Satz 4.11 ist $\chi_N = e\psi$ mit $e := (\chi_N, \psi)_N$. Es folgt

$$f := (\varphi_N, \psi)_N = \sum_{\tau \in \text{Irr}(G_\psi)} a_\tau (\tau_N, \psi)_N \geq a_\chi (\chi_N, \psi)_N \geq e > 0,$$

d. h. $\varphi \in \text{Irr}(G | \psi)$. Satz 4.11 impliziert

$$\varphi(1) = \varphi_N(1) = f \sum_{gG_\psi \in G/G_\psi} {}^g\psi(1) \geq e |G : G_\psi| \psi(1) = |G : G_\psi| \chi(1) = \chi^G(1) \geq \varphi(1).$$

Dies zeigt $\chi^G = \varphi \in \text{Irr}(G | \psi)$ und $e = f$. Also ist Φ wohldefiniert.

Sei nun $\theta \in \text{Irr}(G | \psi)$ gegeben. Wegen $\theta_N = (\theta_{G_\psi})_N$ existiert ein $\chi \in \text{Irr}(G_\psi | \psi)$ mit $(\theta, \chi^G)_G = (\theta_N, \chi)_{G_\psi} \neq 0$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $\chi^G = \theta$, d. h. Φ ist surjektiv. Außerdem ist $(\theta_N, \psi)_N = (\chi_N, \psi)_N$, d. h. χ ist der einzige irreduzible Bestandteil von θ_{G_ψ} , der in $\text{Irr}(G_\psi | \psi)$ liegt. Dies zeigt die Injektivität von Φ . \square

Satz 4.14 (ITÔ). Sei A eine abelsche Untergruppe von G und $\chi \in \text{Irr}(G)$. Dann gilt:

- (i) $\chi(1) \leq |G : A|$.
- (ii) Ist $A \trianglelefteq G$, so ist $\chi(1) \mid |G : A|$.

Beweis.

(i) Aufgabe 12.

(ii) Sei ψ ein irreduzibler Bestandteil von χ_A . Nach Satz 4.13 existiert ein $\tilde{\chi} \in \text{Irr}(G_\psi)$ mit $\tilde{\chi}^G = \chi$ und $\tilde{\chi}_A = e\psi$ für ein $e \in \mathbb{N}$. Da A abelsch ist, gilt $|\tilde{\chi}(x)| = |e\psi(x)| = e\psi(1) = e = \tilde{\chi}(1)$ für $x \in A$, d. h. $A \subseteq Z(\tilde{\chi})$. Nach Satz 3.11 ist $\tilde{\chi}(1) \mid |G_\psi : Z(\tilde{\chi})| \mid |G_\psi : A|$ und daher $\chi(1) = |G : G_\psi| \tilde{\chi}(1) \mid |G : G_\psi| |G_\psi : A| = |G : A|$. \square

Satz 4.15. Sei $N \trianglelefteq G$ und $\psi \in \text{Irr}(N)$ mit $G_\psi = G$. Dann ist $\psi^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi \chi$, wobei e_χ der Verzweigungsindex von χ ist (falls $e_\chi > 0$). Insbesondere ist $\sum e_\chi^2 = |G : N|$.

Beweis. Wir schreiben $\psi^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} f_\chi \chi$. Im Fall $f_\chi \neq 0$, ist $\chi_N = e_\chi \psi$ nach Satz 4.11. Dabei gilt $f_\chi = (\chi, \psi^G)_G = (\chi_N, \psi)_N = (e_\chi \psi, \psi)_N = e_\chi$. Es folgt

$$|G : N| \psi(1) = \psi^G(1) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi \chi(1) = \psi(1) \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi^2$$

und $\sum e_\chi^2 = |G : N|$. □

Bemerkung 4.16. Die Zahlen e_χ verhalten sich also wie Charaktergrade. In folgendem Satz werden wir sehen, dass es tatsächlich Charaktergrade sind, falls $e_\chi = 1$ für ein $\chi \in \text{Irr}(G)$ gilt.

Satz 4.17 (GALLAGHER). Sei $N \trianglelefteq G$ und $\chi \in \text{Irr}(G)$ mit $\psi := \chi_N \in \text{Irr}(N)$. Dann ist $\{\lambda\chi : \lambda \in \text{Irr}(G/N)\}$ die Menge der irreduziblen Bestandteile von ψ^G .

Beweis. Wie üblich fassen wir die Charaktere von G/N durch Inflation als Charaktere von G auf. Nach Aufgabe 11 ist $(\chi_N)^G = \chi\rho$, wobei ρ der reguläre Charakter von G/N ist. Also ist

$$\psi^G = \sum_{\lambda \in \text{Irr}(G/N)} \lambda(1) \chi\lambda.$$

Nach Satz 4.15 ist

$$|G : N| = (\psi^G, \psi^G)_G = \sum_{\lambda, \lambda' \in \text{Irr}(G/N)} \lambda(1)\lambda'(1)(\chi\lambda, \chi\lambda')_G \geq \sum_{\lambda \in \text{Irr}(G/N)} \lambda(1)^2 = |G : N|.$$

Dies zeigt, dass die $\chi\lambda$ mit $\lambda \in \text{Irr}(G/N)$ irreduzibel und paarweise verschieden sind. □

Satz 4.18. Sei $N \trianglelefteq G$ und G/N zyklisch. Für jedes $\psi \in \text{Irr}(N)$ mit $G_\psi = G$ existiert dann ein Fortsetzung $\chi \in \text{Irr}(G)$ mit $\chi_N = \psi$.

Beweis. Sei $\Delta : N \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung mit Charakter ψ . Sei $G/N = \langle gN \rangle$ und $k := |G/N|$. Wegen $G_\psi = G$ sind Δ und ${}^g\Delta$ ähnlich. Sei also $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $A\Delta(x)A^{-1} = \Delta(gxg^{-1})$ für alle $x \in N$. Induktiv folgt

$$A^k \Delta(x) A^{-k} = \Delta(g^k x g^{-k}) = \Delta(g^k) \Delta(x) \Delta(g^k)^{-1}$$

für alle $x \in N$. Nach Schurs Lemma ist $A^{-k} \Delta(g^k) = \lambda 1_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Sei $\mu \in \mathbb{C}^\times$ mit $\mu^k = \lambda$. Wegen $(\mu A)^k = \lambda A^k = \Delta(g^k)$ ist die Abbildung

$$\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad g^i x \mapsto (\mu A)^i \Delta(x)$$

mit $i \in \mathbb{Z}$ und $x \in N$ wohldefiniert. Für $i, j \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in N$ gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(g^i x \cdot g^j y) &= \Gamma(g^{i+j} \cdot (g^{-j} x g^j) y) = (\mu A)^{i+j} \Delta(g^{-j} x g^j) \Delta(y) = (\mu A)^{i+j} A^{-j} \Delta(x) A^j \Delta(y) \\ &= (\mu A)^i \Delta(x) (\mu A)^j \Delta(y) = \Gamma(g^i x) \Gamma(g^j y). \end{aligned}$$

Also ist Γ eine Darstellung, die Δ fortsetzt. Mit Δ muss auch Γ irreduzibel sein. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 4.19 (TAUNT). Hat G abelsche p -Sylowgruppen, so ist $p \nmid |G' \cap Z(G)|$.

Beweis. Nehmen wir indirekt an, dass $U \leq G' \cap Z(G)$ mit $|U| = p$ existiert. Sei $U \leq P \in \text{Syl}_p(G)$ und $1_U \neq \lambda \in \text{Irr}(U)$. Sei $\mu \in \text{Irr}(P)$ mit $(\mu, \lambda^P)_P \neq 0$. Dann ist $(\mu_U, \lambda)_U \neq 0$ und $\mu_U = \lambda$ wegen $\mu(1) = 1$ (P abelsch). Wir schreiben

$$\mu^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi.$$

Wegen $p \nmid |G : P| = \mu^G(1)$ existiert ein $\chi \in \text{Irr}(G)$ mit $a_\chi > 0$ und $p \nmid \chi(1) =: n$. Insbesondere ist $(\mu, \chi_P)_P \neq 0$ (Frobenius-Reziprozität). Damit ist auch $\mu_U = \lambda$ ein irreduzibler Bestandteil von χ_U . Sei Δ eine Darstellung mit Charakter χ . Für $x \in U \subseteq Z(G) \subseteq Z(\chi)$ ist dann $\Delta(x) = \lambda(x) 1_n$ (Satz 2.14). Es folgt $\chi_U = n\lambda$. Da $G/\text{Ker}(\det \Delta) \leq \mathbb{C}^\times$ abelsch ist, gilt $G' \subseteq \text{Ker}(\det \Delta)$. Wegen $U \subseteq G'$ gilt also insbesondere

$$1 = \det \Delta(x) = \lambda(x)^n$$

für alle $x \in U$. Andererseits ist auch $\lambda(x)^p = \lambda(x^p) = 1$. Wegen $\text{ggT}(p, n) = 1$ existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha p + \beta n = 1$. Man erhält: $\lambda(x) = (\lambda(x)^p)^\alpha (\lambda(x)^n)^\beta = 1$ für alle $x \in U$. Dies widerspricht $\lambda \neq 1_U$. □

Definition 4.20. Eine *Gruppenoperation* von G auf einer nichtleeren Menge Ω ist ein Homomorphismus $f : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$. Wir schreiben ${}^g\omega := (f(g))(\omega)$ für $g \in G$ und $\omega \in \Omega$. Man sagt auch: G operiert auf Ω .

Satz 4.21 (BRAUERS Permutationslemma). *Sei H eine endliche Gruppe, sodass G auf $\text{Cl}(H)$ und $\text{Irr}(H)$ operiert. Für alle $g \in G$, $C \in \text{Cl}(H)$ und $\chi \in \text{Irr}(H)$ gelte dabei ${}^g\chi({}^gC) = \chi(C)$. Dann stimmt der Zyklentyp von $g \in G$ in $\text{Sym}(\text{Cl}(H))$ mit dem Zyklentyp von g in $\text{Sym}(\text{Irr}(H))$ überein. Insbesondere gilt*

$$|\{C \in \text{Cl}(H) : {}^gC = C\}| = |\{\chi \in \text{Irr}(H) : {}^g\chi = \chi\}|$$

für alle $g \in G$.

Beweis. Sei $\text{Cl}(H) = \{C_1, \dots, C_k\}$ und $\text{Irr}(H) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$. Sei $X := (\chi_i(C_j))_{i,j}$ die Charaktertafel von H . Sei $g \in G$ fest. Die Operation von g auf $\text{Cl}(H)$ (bzw. $\text{Irr}(H)$) wird dann durch eine Permutationsmatrix P (bzw. Q) beschrieben. Dabei gilt $QX = ({}^g\chi_i(C_j)) = (\chi_i({}^{g^{-1}}C_j)) = XP$. Da X invertierbar ist (Bemerkung 2.1), gilt $Q = XPX^{-1}$, d. h. Q und P sind ähnlich. Sei (l_1, \dots, l_n) der Zyklentyp von P . Nach Aufgabe 13 sind die Eigenwerte von P gegeben durch: $\{e^{2\pi ij/l_1} : j = 0, \dots, l_1 - 1\} \cup \dots \cup \{e^{2\pi ij/l_n} : j = 0, \dots, l_n - 1\}$ (mit Vielfachheiten). Da P und Q die gleichen Eigenwerte haben, ist (l_1, \dots, l_n) auch der Zyklentyp von Q . Die letzte Behauptung erhält man durch Zählen von Einerzyklen. \square

5 Frobeniusgruppen

Definition 5.1. Eine endliche Gruppe G heißt *Frobeniusgruppe*, falls eine Untergruppe $1 < H < G$ mit $H \cap gHg^{-1} = 1$ für alle $g \in G \setminus H$ existiert. Man nennt H *Frobeniuskomplement*.

Beispiel 5.2.

- (i) Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $|P| = p$ und $N_G(P) = P < G$. Dann ist G offenbar eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement P . Insbesondere ist S_3 eine Frobeniusgruppe.
- (ii) Sei K ein endlicher Körper mit $|K| > 2$. Für $a \in K^\times$ und $b \in K$ definieren wir $f_{a,b} : K \rightarrow K$, $x \mapsto ax + b$. Dann ist

$$\text{Aff}(1, K) := \{f_{a,b} : a \in K^\times, b \in K\} \leq \text{Sym}(K)$$

eine Frobeniusgruppe (Aufgabe 15).

Bemerkung 5.3. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass ein Frobeniuskomplement H von G stets ein normales Komplement N besitzt, d. h. $G = HN$ und $H \cap N = 1$.

Lemma 5.4. Sei H ein Frobeniuskomplement in G . Wir setzen

$$N := G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \cup \{1\}.$$

Dann ist $|N| = |G : H|$ (als Menge). Ist $M \trianglelefteq G$ mit $H \cap M = 1$, dann folgt $M \subseteq N$.

Beweis. Für $x, y \in G$ ist

$$xHx^{-1} = yHy^{-1} \iff y^{-1}x \in N_G(H) = H \iff xH = yH.$$

Im Fall $xHx^{-1} \neq yHy^{-1}$ ist $|xHx^{-1} \cap yHy^{-1}| = |x(H \cap x^{-1}yHy^{-1}x)x^{-1}| = |H \cap x^{-1}yHy^{-1}x| = 1$. Dies zeigt

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| = |G : H|(|H| - 1) + 1.$$

Es folgt $|N| = |G| - |G : H|(|H| - 1) = |G : H|$. Für $M \trianglelefteq G$ mit $H \cap M = 1$ ist auch $gHg^{-1} \cap M = g(H \cap M)g^{-1} = 1$ für alle $g \in G$. Also ist $M \subseteq N$. \square

Lemma 5.5. Sei H ein Frobeniuskomplement in G , und sei $\psi \in \text{CF}(H)$ mit $\psi(1) = 0$. Dann ist $(\psi^G)_H = \psi$.

Beweis. Sei $1 \neq h \in H$ und $g \in G$ mit $ghg^{-1} \in H$. Dann ist $1 \neq ghg^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$ und $g \in H$. Nach Definition ist also

$$\psi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \psi(ghg^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \psi(h) = \psi(h).$$

Außerdem ist $\psi^G(1) = |G : H|\psi(1) = 0 = \psi(1)$. \square

Satz 5.6 (FROBENIUS). Sei G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement H . Dann existiert ein $N \trianglelefteq G$ mit $G = HN$ und $H \cap N = 1$.

Beweis. Sei $1_H \neq \psi \in \text{Irr}(H)$ und $\theta := \psi - \psi(1)1_H$. Dann ist sicher $\theta \in \text{CF}(H)$ und $\theta(1) = 0$. Nach Lemma 5.5 ist

$$1 + \psi(1)^2 = (\theta, \theta)_H = (\theta, (\theta^G)_H)_H = (\theta^G, \theta^G)_G.$$

Außerdem ist $(\theta^G, 1_G)_G = (\theta, 1_H)_H = -\psi(1)$. Folglich ist $\tilde{\psi} := \theta^G + \psi(1)1_G \in \text{CF}(G)$ mit

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})_G = (\theta^G, \theta^G)_G + 2\psi(1)(\theta^G, 1_G)_G + \psi(1)^2 = 1.$$

Mit θ sind auch θ^G und $\tilde{\psi}$ virtuelle Charaktere (Bemerkung 1.26). Also ist $\pm\tilde{\psi} \in \text{Irr}(G)$. Für $h \in H$ gilt

$$\tilde{\psi}(h) = \theta^G(h) + \psi(1) = \theta(h) + \psi(1) = \psi(h).$$

Insbesondere ist $\tilde{\psi}(1) = \psi(1) > 0$. Dies zeigt $\tilde{\psi} \in \text{Irr}(G)$ mit $\tilde{\psi}_H = \psi$. Wir setzen zusätzlich $\tilde{1}_H := 1_G$. Sei

$$M := \bigcap_{\psi \in \text{Irr}(H)} \text{Ker}(\tilde{\psi}) \trianglelefteq G.$$

Dann ist

$$M \cap H \subseteq \bigcap_{\psi \in \text{Irr}(H)} \text{Ker}(\psi) = 1$$

nach Aufgabe 9. Nach Lemma 5.4 ist also $M \subseteq N$. Für $g \in N$ gilt umgekehrt

$$\tilde{\psi}(g) - \tilde{\psi}(1) = \tilde{\psi}(g) - \psi(1) = \theta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G, \\ g \in x^{-1}Hx}} \theta(xgx^{-1}) = 0$$

für alle $\psi \in \text{Irr}(H)$. Dies zeigt $N \subseteq M$ und $N = M \trianglelefteq G$. Wegen $|N| = |G : H|$ gilt auch $|HN| = |H||N| = |G|$ und $G = HN$. \square

Definition 5.7. In der Situation von Satz 5.6 nennt man N den *Frobeniuskern* von G .

Bemerkung 5.8.

- (i) Man kennt keinen Beweis von Satz 5.6, der ohne Charaktertheorie auskommt.
- (ii) Thompson hat gezeigt, dass der Frobeniuskern N stets nilpotent ist, d. h. N ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.

Satz 5.9. Sei G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern N . Dann ist

$$\text{Irr}(G) = \text{Irr}(G/N) \cup \{\psi^G : 1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)\}.$$

Beweis. Sei H ein Frobeniuskomplement von G . Dann operiert H auf $\text{Cl}(N)$ durch ${}^h C := \{h x h^{-1} : x \in C\}$. Man zeigt auch leicht, dass H auf $\text{Irr}(N)$ durch Konjugation operiert. Dabei gilt ${}^h \psi({}^h C) = \psi(C)$ für $h \in H$, $\psi \in \text{Irr}(N)$ und $C \in \text{Cl}(N)$. Wir zählen die Fixpunkte von $h \in H \setminus \{1\}$ auf $\text{Cl}(N)$. Sei zunächst $h x h^{-1} = x \in N$. Dann ist $x^{-1} h x = h \in H \cap x^{-1} H x$ und $x = 1$. Die Bahnen von $\langle h \rangle$ auf $N \setminus \{1\}$ haben daher die Länge $|\langle h \rangle|$. Ist $C \in \text{Cl}(N) \setminus \{\{1\}\}$ ein Fixpunkt von $\langle h \rangle$, so folgt $|\langle h \rangle| \mid |C|$. Andererseits ist $|C| \mid |N|$. Dies widerspricht Aufgabe 16. Also ist $\{1\}$ der einzige Fixpunkt von $\langle h \rangle$ auf $\text{Cl}(N)$. Nach Brauers Permutationslemma ist daher auch

$$\{\psi \in \text{Irr}(N) : {}^h \psi = \psi\} = \{1_N\}$$

für alle $h \neq 1$. Sei $1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)$. Dann ist $G_\psi = N$ und $\psi^G \in \text{Irr}(G)$ nach Satz 4.13. Nach Satz 4.11 existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $(\psi^G)_N = e \sum_{gN \in G/N} {}^g \psi$. Sind $\psi, \psi_1 \in \text{Irr}(N)$ nicht konjugiert, so ist also $\psi^G \neq \psi_1^G$. Für ein $\chi \in \text{Irr}(G/N)$ ist offenbar $\chi_N = \chi(1)1_N$ und somit $\chi \notin \{\psi^G : 1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)\}$. Sei \mathcal{R} ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von $\text{Irr}(N) \setminus \{1_N\}$ unter H . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G/N)} \chi(1)^2 + \sum_{\psi \in \mathcal{R}} \psi^G(1)^2 &= |G/N| + |G/N|^2 \sum_{\psi \in \mathcal{R}} \psi(1)^2 = |G/N| + |G/N| \sum_{h \in H} \sum_{\psi \in \mathcal{R}} ({}^h \psi)(1)^2 \\ &= |G/N| + |G/N| \sum_{1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)} \psi(1)^2 = |G/N| + |G/N|(|N| - 1) = |G|. \end{aligned}$$

Also haben wir alle irreduziblen Charaktere von G gefunden. \square

6 Induktionssätze

Bemerkung 6.1.

- (i) Oft konstruiert man die Charaktertafel von G , indem man Charaktere von $H \leq G$ induziert. Wir werden in diesem Kapitel sehen, welche Untergruppen H man hierzu betrachten muss.
- (ii) Für Untergruppen $H, K \leq G$ operiert $H \times K$ auf G durch ${}^{(h,k)}g = h g k^{-1}$ für $h \in H, k \in K$ und $g \in G$. Die Bahnen HgK heißen *Doppelnebenklassen*. Die Menge der Doppelnebenklassen bezeichnen wir mit $H \backslash G / K$.

Satz 6.2 (MACKEY-Formel). *Sei $H, K \leq G$ und $\varphi \in \text{CF}(H)$. Dann ist*

$$(\varphi^G)_K = \sum_{KgH \in K \backslash G / H} ({}^g\varphi)_{K \cap gHg^{-1}}^K.$$

Beweis. Sei R ein Repräsentantensystem für $K \backslash G / H$ und für $r \in R$ sei S_r ein Repräsentantensystem für $K / K \cap rHr^{-1}$. Für jedes $k \in K$ existieren $s \in S_r$ und $x \in K \cap rHr^{-1}$ mit $k = sx$ und $krH = sxrH = sr(r^{-1}xr)H = srH$. Für $s, t \in S_r$ gilt

$$srK = trK \iff s(K \cap rHr^{-1}) = K \cap srHr^{-1} = K \cap trHr^{-1} = t(K \cap rHr^{-1}) \iff s = t.$$

Dies zeigt

$$G = \dot{\bigcup}_{r \in R} KrH = \dot{\bigcup}_{r \in R} \dot{\bigcup}_{s \in S_r} srH \quad (\text{disjunkt}).$$

Nach Bemerkung 4.4 gilt für $x \in K$:

$$\begin{aligned} (\varphi^G)(x) &= \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} g\varphi(x) = \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in S_r, \\ xsrH = srH}} {}^{sr}\varphi(x) \\ &= \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in S_r, \\ xs(rHr^{-1}) = s(rHr^{-1})}} {}^s({}^r\varphi)(x) = \sum_{r \in R} ({}^r\varphi)_{K \cap gHg^{-1}}^K(x). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 6.3.

- (i) Eine Gruppe H heißt *(p-)quasielementar* für eine Primzahl p , falls H einen zyklischen Normalteiler N mit $p \nmid |N|$ besitzt, sodass H/N eine p -Gruppe ist (d. h. N ist ein p' -Hallnormalteiler).
- (ii) Eine Gruppe H heißt *(p-)elementar* für eine Primzahl p , falls H ein direktes Produkt einer p -Sylowgruppe und einer zyklischen Gruppe ist. Offenbar sind elementare Gruppen auch quasielementar.

Lemma 6.4. *Zu jeder Primzahl p und jedem $x \in G$ existiert eine p -quasielementare Untergruppe $H \leq G$ mit $p \nmid 1_H^G(x) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir schreiben $\langle x \rangle = P \times Q$ mit $P \in \text{Syl}_p(\langle x \rangle)$ und wählen $H/Q \in \text{Syl}_p(N_G(Q)/Q)$. Da Q zyklisch ist, ist H p -quasielementar. Für $g \in G$ mit $g x g^{-1} \in H$ ist auch $g Q g^{-1} \subseteq H$. Somit ist $g Q g^{-1} \subseteq \{y \in H : p \nmid |\langle y \rangle|\} = Q$ und $g \in N_G(Q)$. Dies zeigt

$$\begin{aligned} 1_H^G(x) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ g x g^{-1} \in H}} 1 = \frac{1}{|H|} |\{g \in N_G(Q) : g x g^{-1} \in H\}| = \frac{1}{|H|} |\{g \in N_G(Q) : g^{-1} x g \in H\}| \\ &= |\{gH \in N_G(Q)/H : xgH = gH\}|. \end{aligned}$$

Wir müssen also die Fixpunkte der Operation $\alpha : \langle x \rangle \rightarrow \text{Sym}(N_G(Q)/H)$ durch Linksmultiplikation zählen. Wegen $QgH = gQH = gH$ für $g \in N_G(Q)$ ist $Q \leq \text{Ker}(\alpha)$. Da $xQ \in \langle x \rangle/Q \cong P$ ein p -Element ist, ist auch $\alpha(x)$ ein p -Element. Insbesondere zerfällt $\alpha(x)$ in Zyklen, deren Längen p -Potenzen sind. Dies liefert

$$1_H^G(x) = |\{gH \in N_G(Q)/H : xgH = gH\}| \equiv |N_G(Q)/H| \not\equiv 0 \pmod{p}. \quad \square$$

Satz 6.5 (SOLOMON). *Es existieren $a_H \in \mathbb{Z}$ mit*

$$1_G = \sum_{\substack{H \leq G, \\ H \text{ quasiaelementar}}} a_H 1_H^G.$$

Beweis. Sei

$$\mathcal{Q}(G) := \left\{ \sum_{H \leq G \text{ quasiael.}} a_H 1_H^G : a_H \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Für $x \in G$ sei $U_x := \{\lambda(x) : \lambda \in \mathcal{Q}(G)\}$. Wegen $-\lambda \in \mathcal{Q}(G)$ für $\lambda \in \mathcal{Q}(G)$ ist U_x eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, d. h. $U_x = n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 6.4 ist $U_x \not\subseteq p\mathbb{Z}$ für jede Primzahl p . Dies zeigt $U_x = \mathbb{Z}$. Wir wählen $\lambda_x \in \mathcal{Q}(G)$ mit $\lambda_x(x) = 1$ für $x \in G$. Für quasiaelementare Untergruppen $H, K \leq G$ und $g \in G$ ist auch $H \cap gKg^{-1} \leq H$ quasiaelementar (Aufgabe 17). Die Mackey-Formel zeigt also

$$\begin{aligned} 1_H^G 1_K^G &\stackrel{4.5(\text{ii})}{=} (1_H(1_K)_H)^G = ((1_K)_H)^G = \left(\sum_{HgK \in H \backslash G/K} ((1_{gKg^{-1}})_{H \cap gKg^{-1}})^H \right)^G \\ &\stackrel{4.5(\text{i})}{=} \sum_{HgK \in H \backslash G/K} (1_{H \cap gKg^{-1}})^G \in \mathcal{Q}(G). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{Q}(G)$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Durch Ausmultiplizieren der Gleichung $\prod_{x \in G} (1_G - \lambda_x) = 0$ erhält man eine Darstellung für 1_G in der gewünschten Form. \square

Lemma 6.6. *Sei H elementar und $\chi \in \text{Irr}(H)$. Dann existieren $K \leq H$ und $\lambda \in \text{Irr}(K)$ mit $\lambda(1) = 1$ und $\lambda^H = \chi$.*

Beweis (MANN). Sei H ein minimales Gegenbeispiel. Wir schreiben $H = P \times Q$ mit $P \in \text{Syl}_p(H)$. Nach Satz 2.5 ist $\chi = \psi\lambda$ mit $\psi \in \text{Irr}(P)$ und $\lambda \in \text{Irr}(Q)$. Im Fall $Q \neq 1$ existieren $P_1 \leq P$, $\psi_1 \in \text{Irr}(P_1)$ mit $\psi_1(1) = 1$ und $\psi = \psi_1^P$. Dann ist $\chi = \psi_1^P(1_P\lambda) = (\psi_1\lambda)^H$ mit $\psi_1\lambda \in \text{Irr}(P_1 \times Q)$ nach Satz 4.5(ii). Da Q abelsch ist, gilt auch $(\psi_1\lambda)(1) = \psi_1(1)\lambda(1) = 1$. Dieser Widerspruch zeigt $Q = 1$, d. h. H ist eine p -Gruppe.

Für $\lambda \in \text{Irr}(H)$ mit $\lambda(1) = 1$ ist $\chi\lambda \in \text{Irr}(H)$ (Aufgabe 6). Im Fall $\chi\lambda = \chi$ ist $1 = (\chi, \chi\lambda)_H = (\chi\bar{\chi}, \lambda)_H$, d. h. λ ist ein irreduzibler Bestandteil von $\chi\bar{\chi}$ mit Vielfachheit 1. Schreibe $\chi\bar{\chi} = 1_H + \lambda_1 + \dots + \lambda_r + \sum_{i=1}^s a_i \psi_i$ mit $\lambda_1(1) = \dots = \lambda_r(1) = 1 < \psi_1(1) \leq \dots \leq \psi_s(1)$. Dann ist

$$r + 1 \equiv r + 1 + \sum_{i=1}^s a_i \psi_i(1) = (\chi\bar{\chi})(1) = \chi(1)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

und $r \neq 0$. Sei also $1_H \neq \lambda \in \text{Irr}(H)$ mit $\chi\lambda = \chi$. Für $x \in H \setminus \text{Ker}(\lambda)$ ist dann $(1_H - \lambda)(x)\chi(x) = (\chi - \lambda\chi)(x) = 0$ und somit $\chi(x) = 0$. Wähle eine maximale Untergruppe $M < H$ mit $\text{Ker}(\lambda) \subseteq M$. Wegen $H' \subseteq \text{Ker}(\lambda)$ ist dann $M \trianglelefteq H$. Da H/M ein Element der Ordnung p enthält, folgt $|H : M| = p$ aus der Maximalität von M . Sei $\psi \in \text{Irr}(M)$ mit $(\chi_M, \psi)_M \neq 0$. Im Fall $H_\psi = M$ ist $\psi^H = \chi$ nach Clifford. Wegen $M < H$ existieren $M_1 \leq M$ und $\psi_1 \in \text{Irr}(M_1)$ mit $\psi_1(1) = 1$ und $\psi_1^M = \psi$. Nach Satz 4.5(i) ist dann $\psi_1^H = (\psi_1^M)^H = \psi^H = \chi$. Dieser Widerspruch zeigt $H_\psi = H$. Also ist $\chi_M = e\psi$ für ein $e \in \mathbb{N}$ nach Satz 4.11. Wegen $\chi(1) = e\psi(1)$ ist e eine p -Potenz. Aus Satz 4.15 folgt nun $e = 1$, d. h. $\chi_M = \psi$. Nach Gallagher ist $\psi^H = \chi_1 + \dots + \chi_p$ mit paarweise verschiedenen $\chi_i \in \text{Irr}(H)$ und $\chi_1 = \chi$. Außerdem haben alle χ_i den gleichen Grad. Insbesondere ist $(\chi_i)_M = \psi$ für $i = 1, \dots, p$. Da ψ^H und χ auf $H \setminus M (\subseteq H \setminus \text{Ker}(\lambda))$ verschwinden, verschwindet auch $\chi_2 + \dots + \chi_p$ auf $H \setminus M$. Dies liefert den Widerspruch

$$0 = |H|(\chi_1, \chi_2 + \dots + \chi_p)_H = \sum_{x \in M} \chi_1(x) \overline{(\chi_2 + \dots + \chi_p)(x)} = |M|(p-1)(\psi, \psi)_M = |M|(p-1). \quad \square$$

Satz 6.7 (BRAUERS Induktionssatz). *Für jeden (virtuellen) Charakter χ von G existieren $a_{H,\psi} \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\chi = \sum_{\substack{H \leq G, \\ H \text{ elementar}}} \sum_{\substack{\psi \in \text{Irr}(H), \\ \psi(1)=1}} a_{H,\psi} \psi^G.$$

Beweis. Offenbar können wir annehmen, dass χ irreduzibel ist. Nach Lemma 6.6 können wir die Bedingung $\psi(1) = 1$ vernachlässigen. Hat man die gewünschte Darstellung für den Charakter 1_G gefunden, so erhält man durch Multiplikation mit χ eine entsprechende Darstellung für χ (beachte: $\chi\psi^G = (\chi_H\psi)^G$). Wir können daher $\chi = 1_G$ annehmen. Nach Solomon können wir auch annehmen, dass G p -quasielementar für eine Primzahl p ist. Sei G ein minimales Gegenbeispiel, und sei $P \in \text{Syl}_p(G)$. Dann besitzt P ein zyklisches, normales Komplement N in G .

Wir betrachten die elementare Untergruppe $H := PC_N(P) \cong P \times C_N(P)$. Da G nicht elementar ist, gilt $H < G$. Wegen $(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_H)_H = 1$ ist $\zeta := 1_H^G - 1_G$ ein Charakter von G . Ist jeder irreduzible Bestandteil von ζ aus einer echten Untergruppe induziert, so erhält man leicht eine gewünschte Darstellung für $1_G = 1_H^G - \zeta$ aus der Minimalität von G . Folglich existiert also ein $\psi \in \text{Irr}(G)$ mit $(\zeta, \psi)_G \neq 0$, sodass ψ nicht aus einer echten Untergruppe induziert ist. Für $g \in G$ ist $NgH = gNH = G$. Nach Mackey ist daher $1_N + \zeta_N = (1_H^G)_N = 1_{N \cap H}^N$. Dies zeigt $(1_N + \zeta_N, 1_N)_N = (1_{N \cap H}^N, 1_N)_N = (1_{N \cap H}, 1_{N \cap H})_{N \cap H} = 1$ und $(\psi_N, 1_N)_N \leq (\zeta_N, 1_N)_N = 0$. Wir können daher $1_N \neq \lambda \in \text{Irr}(N)$ mit $(\psi_N, \lambda)_N \neq 0$ wählen. Schreibe $N = \langle x \rangle$. Für $g \in G$ ist dann $gxg^{-1} = x^r$ für ein $r \in \mathbb{Z}$ wegen $N \trianglelefteq G$. Außerdem existiert ein $s \in \mathbb{Z}$ mit $N \cap H = C_N(P) = \langle x^s \rangle$. Dann ist $gx^s g^{-1} = x^{sr} = (x^s)^r$. Dies zeigt $C_N(P) \trianglelefteq G$. Für $a \in C_N(P) \subseteq H$ ist daher

$$1_H^G(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ gag^{-1} \in H}} 1 = |G : H| = 1_H^G(1).$$

Also ist $C_N(P) \subseteq \text{Ker}(1_H^G) = \text{Ker}(\zeta) \subseteq \text{Ker}(\psi)$ nach Aufgabe 9. Analog ist $C_N(P) \subseteq \text{Ker}(\psi) \cap N = \text{Ker}(\psi_N) \subseteq \text{Ker}(\lambda)$. Da ψ aus keiner echten Untergruppe induziert ist, folgt $G_\lambda = G$ nach Clifford. Insbesondere ist $\lambda(y^{-1}xy) = {}^y\lambda(x) = \lambda(x)$ für $y \in P$. Also ist $yx y^{-1} \in x \text{Ker}(\lambda)$ (beachte: $\lambda(1) = 1$). Wie oben zeigt man $\text{Ker}(\lambda) \trianglelefteq G$ (als Untergruppe des zyklischen Normalteilers N). Folglich operiert P auf der Nebenklasse $x \text{Ker}(\lambda)$ durch Konjugation. Zählen der Bahnen liefert

$$|x \text{Ker}(\lambda) \cap C_N(P)| \equiv |x \text{Ker}(\lambda)| = |\text{Ker}(\lambda)| \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Dies zeigt $\emptyset \neq x \text{Ker}(\lambda) \cap C_N(P) \subseteq x \text{Ker}(\lambda) \cap \text{Ker}(\lambda)$ und $x \in \text{Ker}(\lambda)$. Also ist $N = \langle x \rangle \subseteq \text{Ker}(\lambda)$ und $\lambda = 1_N$. Widerspruch. \square

Satz 6.8. *Eine Klassenfunktion χ von G ist genau dann ein irreduzibler Charakter, falls folgende Bedingungen gelten:*

- (i) *Für jede elementare Untergruppe $H \leq G$ ist χ_H ein virtueller Charakter.*
- (ii) $(\chi, \chi)_G = 1$.
- (iii) $\chi(1) > 0$.

Beweis. Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ gelten offenbar (i)–(iii). Sei nun umgekehrt $\chi \in \text{CF}(G)$, sodass (i)–(iii) gilt. Nach Satz 6.7 existieren $a_{H,\psi} \in \mathbb{Z}$ mit

$$1_G = \sum_{\substack{H \leq G, \\ H \text{ elementar}}} \sum_{\psi \in \text{Irr}(H)} a_{H,\psi} \psi^G. \quad (*)$$

Nach Voraussetzung sind $\psi\chi_H$ und $\psi^G\chi = (\psi\chi_H)^G$ für $\psi \in \text{Irr}(H)$ virtuelle Charaktere. Multipliziert man nun (*) mit χ , so sieht man, dass χ ein virtueller Charakter von G ist. Also existieren $a_\varphi \in \mathbb{Z}$ mit $\chi = \sum_{\varphi \in \text{Irr}(G)} a_\varphi \varphi$. Wegen $1 = (\chi, \chi)_G = \sum_{\varphi \in \text{Irr}(G)} a_\varphi^2$ ist $\pm\chi \in \text{Irr}(G)$. Aus $\chi(1) > 0$ folgt schließlich $\chi \in \text{Irr}(G)$. \square

Satz 6.9 (ARTIN). *Für jeden Charakter χ von G existieren $a_{C,\psi} \in \mathbb{Q}$ mit*

$$\chi = \sum_{\substack{C \leq G, \\ C \text{ zyklisch}}} \sum_{\psi \in \text{Irr}(C)} a_{C,\psi} \psi^G.$$

Beweis. Wie in Satz 6.7 können wir $\chi = 1_G$ annehmen. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf G durch

$$x \approx y : \iff \exists g \in G : \langle x \rangle = g \langle y \rangle g^{-1}.$$

Für eine Äquivalenzklasse K von \approx genügt es zu zeigen, dass die charakteristische Funktion

$$\chi_K(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in K, \\ 0 & \text{falls } x \notin K \end{cases}$$

die gewünschte Form hat, denn χ ist die Summe aller χ_K .

Sei $x \in K$ fest. Wir argumentieren durch Induktion nach $n := |\langle x \rangle|$. Für $n = 1$ ist $K = \{1\}$ und $\chi_K = |G|^{-1} 1_1^G$ (siehe Beispiel 4.8). Sei also $n > 1$. Für $C := \langle x \rangle$ und $y \in G$ ist

$$1_C^G(y) = |\{gC \in G/C : g^{-1}yg \in C\}|$$

nach Bemerkung 4.4. Sei $z \in G$ mit $\langle z \rangle = \langle y \rangle$. Dann ist

$$g^{-1}yg \in C \iff g^{-1}\langle y \rangle g \leq C \iff g^{-1}\langle z \rangle g \leq C \iff g^{-1}zg \in C$$

für $g \in G$ und daher $1_C^G(z) = 1_C^G(y)$. Da 1_C^G auch eine Klassenfunktion ist, ist 1_C^G sogar konstant auf den \approx -Klassen. Wir wählen $a \in \mathbb{Q}$ mit $a 1_C^G(x) = 1$. Liegt kein Konjugiertes von y in C , so ist offenbar $1_C^G(y) = 0$. Sei nun $\langle y \rangle < C$ und sei K_y die \approx -Klasse von y . Nach Induktion lässt sich χ_{K_y} in der gewünschten Form schreiben. Somit lässt sich auch $-a 1_C^G \chi_{K_y}$ in der gewünschten Form schreiben. Summiert man über diese Funktionen, so ergibt sich, dass auch

$$\beta(y) := \begin{cases} -a 1_C^G(y) & \text{falls } \langle y \rangle < gCg^{-1} \text{ für ein } g \in G, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gewünschte Form hat. Schließlich hat auch $\chi_K = a 1_C^G + \beta$ die gewünschte Form. \square

Bemerkung 6.10.

- (i) Im Folgenden beschäftigen wir uns mit K -Darstellungen, d. h. Homomorphismen $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, K)$, wobei K ein beliebiger Teilkörper von \mathbb{C} ist.
- (ii) Man sieht leicht, dass der Satz von Maschke auch für K -Darstellungen gilt (im Beweis benötigt man nur $\text{char}(K) \nmid |G|$). Jede K -Darstellung lässt sich also als direkte Summe irreduzibler K -Darstellungen schreiben. Entsprechendes gilt für die K -Charaktere.
- (iii) Genauso gilt folgende Form von Schurs Lemma: Sind Δ und Γ nicht-ähnliche irreduzible K -Darstellungen und $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$ für alle $g \in G$, so ist $A = 0$ (die vollständige Version von Schurs Lemma benötigt, dass K algebraisch abgeschlossen ist).
- (iv) Damit bleibt auch Teil (i) von Lemma 1.18 richtig für K -Darstellungen. Für verschiedene irreduzible K -Charaktere χ und ψ gilt also $(\chi, \psi)_G = 0$ (siehe Beweis von Satz 1.19). Außerdem ist $(\chi, \chi)_G > 0$, aber nicht unbedingt $(\chi, \chi)_G = 1$ (Aufgabe 19).

Definition 6.11. Man nennt $\exp(G) := \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = 1 \forall g \in G\}$ den *Exponenten* von G .

Bemerkung 6.12. Division mit Rest liefert Zahlen $a, r \in \mathbb{Z}$ mit $|G| = a \exp(G) + r$ und $0 \leq r < \exp(G)$. Dann ist $g^r = g^{a \exp(G) + r} = g^{|G|} = 1$ für alle $g \in G$ nach Lagrange. Dies zeigt $r = 0$ und $\exp(G) \mid |G|$.

Satz 6.13 (BRAUER). Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Matrixdarstellung und sei $\zeta := e^{2\pi i / \exp(G)}$. Dann lässt sich Δ über $\mathbb{Q}(\zeta)$ realisieren, d. h. durch geeignete Basiswahl kann man $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$ annehmen.

Beweis. Sei χ der Charakter von Δ . Sei $K := \mathbb{Q}(\zeta)$. Nach Brauers Induktionssatz existieren elementare Untergruppen H_1, \dots, H_m und $\lambda_i \in \text{Irr}(H_i)$ mit $\lambda_i(1) = 1$ und

$$\chi = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i^G$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{Z}$. Wegen $\lambda_i(1) = 1$ ist $\lambda_i(h)^{\exp(G)} = \lambda_i(h^{\exp(G)}) = \lambda_i(1) = 1$ für $h \in H_i$. Daher lässt sich λ_i über K realisieren. Nach Aufgabe 14 lässt sich daher auch λ_i^G über K realisieren. Wir schreiben

$$\lambda_i^G = \sum_{j=1}^k b_{ij} \tau_j,$$

wobei τ_1, \dots, τ_k die irreduziblen K -Charaktere von G sind. Dann ist

$$\chi = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \tau_j.$$

Nach Bemerkung 6.10 gilt $(\tau_j, \tau_j)_G \sum_{i=1}^m a_i b_{ij} = (\chi, \tau_j)_G \geq 0$ für $j = 1, \dots, k$, denn τ_j ist offenbar auch ein Charakter (über \mathbb{C}). Also ist $\sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \geq 0$, und χ ist ein K -Charakter. Es existiert also eine K -Darstellung Γ mit Charakter χ . Nach Satz 1.21 sind Δ und Γ ähnlich. Dies zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung 6.14.

- (i) Die Charaktere zyklischer Gruppen kann man über keinen kleineren Körper als in Satz 6.13 realisieren.
- (ii) Satz 6.13 ermöglicht es, Darstellungen auf dem Computer zu realisieren, denn jedes Element in $\mathbb{Q}(\zeta)$ lässt sich eindeutig in der Form $a_0 + a_1\zeta + \dots + a_k\zeta^k$ mit $k := \varphi(\exp(G)) - 1$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$ schreiben.

Beispiel 6.15. Sei Δ eine Matrixdarstellung mit Charakter χ . Nach Satz 6.13 können wir $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$ mit $\zeta := e^{2\pi i/|G|}$ annehmen. Sei $\alpha \in \mathcal{G} := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$. Offenbar induziert α dann einen Automorphismus auf $\text{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$ durch $\alpha((x_{ij})_{i,j=1}^n) = (\alpha(x_{ij}))_{i,j=1}^n$. Folglich ist auch ${}^\alpha\Delta := \alpha \circ \Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$, $g \mapsto \alpha(\Delta(g))$ eine Matrixdarstellung von G . Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha(\zeta) = \zeta^m$. Für den Charakter ${}^\alpha\chi$ von ${}^\alpha\Delta$ gilt dann ${}^\alpha\chi(g) = \text{Spur } \alpha(\Delta(g)) = \alpha(\chi(g)) = \chi(g^m)$ für $g \in G$ (siehe Beweis von Lemma 2.12 und Aufgabe 5). Umgekehrt weiß man aus Algebra 1, dass für jedes $m \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m, |G|) = 1$ ein $\alpha \in \mathcal{G}$ mit $\alpha(\zeta) = \zeta^m$ existiert ($\mathcal{G} \cong (\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})^\times$). In diesem Fall ist also stets $g \mapsto \chi(g^m)$ ein Charakter von G . Für $m = -1$ erhält man ${}^\alpha\chi = \bar{\chi}$. Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ ist auch ${}^\alpha\chi \in \text{Irr}(G)$, denn

$$({}^\alpha\chi, {}^\alpha\chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(\chi(g)) \alpha(\chi(g^{-1})) = \alpha((\chi, \chi)_G) = \alpha(1) = 1.$$

Gilt $\chi(g) \notin \mathbb{Z}$ für ein $g \in G$, so existiert stets ein $\alpha \in \mathcal{G}$ mit ${}^\alpha\chi \neq \chi$, denn $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ ist eine Galois-Erweiterung. Man nennt χ und ${}^\alpha\chi$ *algebraisch konjugiert*. Auf diese Weise kann man häufig Charaktere konstruieren.

Bemerkung 6.16. Eine Gruppe H heißt *M-Gruppe*, falls jeder irreduzible Charakter von H die Induktion eines Charakters vom Grad 1 ist (d. h. jeder irreduzible Charakter ist *monomial*). Nach Lemma 6.6 sind elementare Gruppen M-Gruppen. Wir werden umgekehrt zeigen, dass jede M-Gruppe auflösbar ist.

Lemma 6.17. Sei ψ ein Charakter von $H \leq G$. Dann ist

$$\text{Ker}(\psi^G) = \bigcap_{g \in G} g \text{Ker}(\psi) g^{-1}.$$

Beweis. Es gilt

$$x \in \text{Ker}(\psi^G) \iff \psi^G(x) = \psi^G(1) = |G : H| \psi(1) \iff \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} \psi(gxg^{-1}) = |G| \psi(1).$$

Für $x \in \text{Ker}(\psi^G)$ ist also

$$|G| \psi(1) = \left| \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} \psi(gxg^{-1}) \right| \leq \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} |\psi(gxg^{-1})| \leq |G| \psi(1)$$

nach Lemma 2.12. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl. Beweis von Lemma 2.12) impliziert $g x g^{-1} \in H$ und $\psi(g x g^{-1}) = \psi(x)$ für alle $g \in G$. Also ist

$$|G|\psi(1) = \sum_{g \in G} \psi(g x g^{-1}) = |G|\psi(x)$$

und $\psi(g x g^{-1}) = \psi(1)$ für alle $g \in G$. Dies zeigt

$$x \in \text{Ker}(\psi^G) \iff \forall g \in G : g x g^{-1} \in \text{Ker}(\psi) \iff x \in \bigcap_{g \in G} g \text{Ker}(\psi) g^{-1}. \quad \square$$

Definition 6.18. Wir definieren $G^{(1)} := G'$ und $G^{(i)} := (G^{(i-1)})'$ für $i \geq 2$.

Bemerkung 6.19.

- (i) Bekanntlich ist $G^{(1)} = G' \trianglelefteq G$. Nehmen wir induktiv an, dass $G^{(i-1)} \trianglelefteq G$ gilt. Sei $g \in G$. Dann ist die Abbildung $G^{(i-1)} \rightarrow G^{(i-1)}$, $x \mapsto g x g^{-1}$ ein Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(G^{(i-1)})$. Nach Bemerkung 2.9 ist also $g G^{(i)} g^{-1} = \alpha((G^{(i-1)})') = (G^{(i-1)})' = G^{(i)}$. Also sind alle $G^{(i)}$ normal in G .
- (ii) Bekanntlich ist G genau dann auflösbar, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$ gibt.

Satz 6.20 (TAKETA). Jede endliche M-Gruppe ist auflösbar.

Beweis. Sei G eine M-Gruppe. Seien $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ die Grade der irreduziblen Charaktere von G (ohne Vielfachheiten). Wir zeigen zunächst $G^{(i)} \subseteq \text{Ker}(\chi)$ für alle $\chi \in \text{Irr}(G)$ mit $\chi(1) = \alpha_i$. Für $i = 1$ hat χ Grad 1 und es gilt $G^{(1)} = G' \subseteq \text{Ker}(\chi)$. Sei nun $i > 1$. Wir argumentieren durch Induktion nach i . Nach Voraussetzung existieren $H < G$ und $\lambda \in \text{Irr}(H)$ mit $\lambda(1) = 1$ und $\chi = \lambda^G$. Wegen $H < G$ und $(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_H)_H = 1$ ist 1_H^G reduzibel. Für jeden irreduziblen Bestandteil ψ von 1_H^G gilt also $\psi(1) < 1_H^G(1) = |G : H| = \lambda^G(1) = \chi(1)$. Nach Induktion ist also $G^{(i-1)} \subseteq \text{Ker}(\psi)$. Nach Aufgabe 9 und Lemma 6.17 ist damit auch $G^{(i-1)} \subseteq \text{Ker}(1_H^G) \subseteq H$. Es folgt $G^{(i)} = (G^{(i-1)})' \subseteq H' \subseteq \text{Ker}(\lambda)$. Wegen $G^{(i)} \trianglelefteq G$ zeigt Lemma 6.17 auch

$$G^{(i)} \subseteq \bigcap_{g \in G} g \text{Ker}(\lambda) g^{-1} = \text{Ker}(\chi).$$

Insbesondere gilt

$$G^{(k)} \subseteq \bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} \text{Ker}(\chi) = 1$$

nach Aufgabe 9, d. h. G ist auflösbar. □

Bemerkung 6.21. Nicht jede auflösbare Gruppe ist auch eine M-Gruppe (siehe Aufgabe 20).

7 Frobenius-Schur-Indikatoren

Bemerkung 7.1. Wir beschäftigen uns mit der Frage, wie viele „Wurzeln“ ein Element $g \in G$ hat.

Definition 7.2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ sei

$$\theta_n(g) := |\{h \in G : h^n = g\}|.$$

Bemerkung 7.3.

- (i) Im Fall $\text{ggT}(n, |G|) = 1$ gilt $\theta_n(g) = 1$ für alle $g \in G$, denn die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^n$ ist eine Bijektion.
- (ii) Offenbar ist θ_n eine Klassenfunktion, d. h. wir können

$$\theta_n = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \nu_n(\chi) \chi$$

mit $\nu_n(\chi) \in \mathbb{C}$ schreiben.

Lemma 7.4. Für alle $\chi \in \text{Irr}(G)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\nu_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n).$$

Beweis. Es gilt

$$\nu_n(\chi) = (\chi, \theta_n)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \theta_n(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{h \in G, \\ h^n = g}} \chi(h^n) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{\substack{g \in G, \\ h^n = g}} \chi(h^n) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h^n). \quad \square$$

Definition 7.5. Man nennt $\nu_2(\chi)$ den *Frobenius-Schur-Indikator* von $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Satz 7.6. Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ gilt:

$$\nu_2(\chi) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \bar{\chi} = \chi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}), g \mapsto (\gamma_{ij}(g))_{i,j=1}^n$ eine Matrixdarstellung mit Charakter χ . Wir betrachten die Darstellung $\Delta^2 := \Delta \otimes \Delta : G \rightarrow \text{GL}(n^2, \mathbb{C})$ (siehe Bemerkung 2.2 und Bemerkung 2.4). Wie dort sei $i \mapsto (i_1, i_2)$ eine Bijektion zwischen $\{1, \dots, n^2\}$ und $\{1, \dots, n\}^2$. Man sieht leicht, dass

$$U := \{(a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2} : a_i = -a_j \text{ falls } (i_1, i_2) = (j_2, j_1)\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{C}^{n^2} ist. Für $(a_1, \dots, a_{n^2}) \in U$ und $g \in G$ ist

$$(\Delta^2(g))(a_1, \dots, a_{n^2}) = \left(\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_1}(g) \gamma_{i_2 j_2}(g) \right)_{i=1}^{n^2}.$$

Sei $k \in \{1, \dots, n^2\}$ mit $(k_1, k_2) = (i_2, i_1)$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_1}(g) \gamma_{i_2 j_2}(g) = - \sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_2}(g) \gamma_{i_2 j_1}(g) = - \sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{k_1 j_1}(g) \gamma_{k_2 j_2}(g).$$

Also ist $(\Delta^2(g))(a_1, \dots, a_{n^2}) \in U$ und U ist Δ^2 -invariant. Nach Maschke existiert ein Δ^2 -invariantes Komplement $V \leq \mathbb{C}^{n^2}$ von U . Seien $\Lambda^2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ und $S^2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ die entsprechenden Teildarstellungen (also $\Delta^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$). O. B. d. A. sei $i_1 < i_2$ für $i = 1, \dots, n(n-1)/2$. Wir wählen $i' \in \{1, \dots, n^2\}$ mit $(i'_1, i'_2) = (i_2, i_1)$. Dann ist $\{b_i := e_i - e_{i'} : i = 1, \dots, n(n-1)/2\}$ eine Basis von U , wobei e_i die Standardbasis von \mathbb{C}^{n^2} ist. Dann ist

$$\begin{aligned} (\Lambda^2(g))(b_i) &= (\Delta^2(g))(b_i) = (\gamma_{j_1 i_1}(g)\gamma_{j_2 i_2}(g) - \gamma_{j_1 i_2}(g)\gamma_{j_2 i_1}(g))_{j=1}^{n^2} \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (\gamma_{j_1 i_1}(g)\gamma_{j_2 i_2}(g) - \gamma_{j_1 i_2}(g)\gamma_{j_2 i_1}(g)) b_j \end{aligned}$$

für $g \in G$ und $i = 1, \dots, n(n-1)/2$. Für den Charakter λ von Λ^2 gilt also

$$\lambda(g) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \gamma_{i_1 i_1}(g)\gamma_{i_2 i_2}(g) - \gamma_{i_1 i_2}(g)\gamma_{i_2 i_1}(g) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(g) \right)^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}(g)\gamma_{ji}(g) \right)}_{\substack{=\text{Spur } \Delta(g)^2 \\ =\text{Spur } \Delta(g^2)}} = \frac{1}{2} (\chi(g)^2 - \chi(g^2))$$

für $g \in G$. Da λ ein Summand von χ^2 ist ($\Delta^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$), gilt $0 \leq (\lambda, 1_G)_G \leq (\chi^2, 1_G)_G = (\chi, \bar{\chi})_G \leq 1$. Nach Lemma 7.4 ist also

$$\nu_2(\chi) = (\chi^2 - 2\lambda, 1_G)_G = (\chi^2, 1_G)_G - 2(\lambda, 1_G)_G = (\chi, \bar{\chi})_G - 2(\lambda, 1_G)_G = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \bar{\chi} = \chi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

Bemerkung 7.7.

- (i) Die im Beweis konstruierte Darstellung Λ^2 (bzw. S^2) nennt man das *alternierende* (bzw. *symmetrische*) *Quadrat* von Δ .
- (ii) Es gilt $\nu_2(\chi) = 1$ genau dann, wenn eine \mathbb{R} -Darstellung mit Charakter χ existiert (ohne Beweis).

Definition 7.8. Ein Element der Ordnung 2 in G heißt *Involution*.

Satz 7.9. Die Anzahl der Involutionen in G ist

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \nu_2(\chi)\chi(1) - 1 = \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(G), \\ \bar{\chi} = \chi \neq 1_G}} \nu_2(\chi)\chi(1).$$

Beweis. Dies folgt aus $|\{x \in G : x^2 = 1\}| = \theta_2(1)$. □

Lemma 7.10. Sei $t > 0$ die Anzahl der Involutionen in G . Dann existiert ein $x \in G \setminus \{1\}$ mit $|G : C_G(x)| \leq (|G|/t)^2$.

Beweis. Sei $S := \{\chi \in \text{Irr}(G) : 1_G \neq \chi = \bar{\chi}\}$. Nach Satz 7.9 ist $0 < t \leq \sum_{\chi \in S} \chi(1)$. Insbesondere ist $S \neq \emptyset$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$t^2 \leq \left(\sum_{\chi \in S} \chi(1) \right)^2 \leq \sum_{\chi \in S} 1^2 \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 = |S| \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 \leq |S||G| \leq (k(G) - 1)|G|.$$

Hätte jede nichttriviale Konjugationsklasse von G mehr als $(|G|/t)^2$ Elemente, so wäre

$$|G| - 1 > (k(G) - 1) \frac{|G|^2}{t^2} \geq |G|. \quad \square$$

Satz 7.11 (BRAUER-FOWLER). Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren nur endlich viele einfache Gruppen G mit einer Involution x , sodass $|C_G(x)| \leq n$ gilt.

Beweis. Ist G abelsch, so ist $|G| = |C_G(x)| \leq n$ und die Behauptung ist klar. Sei also G nichtabelsch. Die Konjugationsklasse von x in G enthält $|G : C_G(x)| \geq |G|/n$ Elemente. Dies ist also eine untere Schranke für die Anzahl der Involutionsen in G . Nach Lemma 7.10 existiert ein $y \in G \setminus \{1\}$ mit $|G : C_G(y)| \leq (|G|/(|G|/n))^2 = n^2$. Da G einfach und nichtabelsch ist, gilt auch $C_G(y) < G$. Wie üblich operiert G transitiv (und damit nicht-trivial) auf $G/C_G(y)$ durch Linksmultiplikation (d. h. ${}^g(hC_G(y)) := ghC_G(y)$). Der entsprechende Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(G/C_G(y))$ ist dann ebenfalls nicht-trivial. Da G einfach ist, folgt $\text{Ker}(\alpha) = 1$. Insbesondere ist $|G| \leq |\text{Sym}(G/C_G(y))| \leq n^2!$. Die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 7.12. Nach Feit-Thompson („Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar“) besitzt jede einfache, nichtabelsche Gruppe eine Involution. Der Satz von Brauer-Fowler war die Grundidee der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

Lemma 7.13. *Sei p^n eine Primzahlpotenz. Die Summe der primitiven p^n -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C} ist 1 falls $n = 0$, -1 falls $n = 1$ oder 0 falls $n \geq 2$.*

Beweis. Wir können $n \geq 1$ annehmen. Für $\zeta := e^{2\pi i/p^n} \in \mathbb{C}$ ist dann $\sum_{i=0}^{p^n-1} \zeta^i = \frac{\zeta^{p^n}-1}{\zeta-1} = 0$. Für $n = 1$ ist die Summe der primitiven Einheitswurzeln $\sum_{i=1}^{p-1} \zeta^i = -1$. Für $n \geq 2$ ergibt sich

$$\sum_{\substack{0 < i < p^n \\ \text{ggT}(i,p)=1}} \zeta^i = \sum_{i=0}^{p^n-1} \zeta^i - \sum_{i=0}^{p^{n-1}-1} \zeta^{pi} = 0. \quad \square$$

Satz 7.14 (FROBENIUS). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\chi \in \text{Irr}(G)$ gilt*

$$\frac{1}{\text{ggT}(n, |G|)} \sum_{\substack{g \in G, \\ g^n=1}} \chi(g) \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist $\text{ggT}(n, |G|) \mid \theta_n(1)$.

Beweis. Sei ρ der reguläre Charakter von G . Wir zeigen zunächst, dass $\tau(g) := \rho(g^n)/\text{ggT}(n, |G|)$ für $g \in G$ ein virtueller Charakter von G ist. Nach Brauer (siehe Beweis von Satz 6.8) genügt es zu zeigen, dass τ_E für jede elementare Untergruppe $E \leq G$ virtuell ist. Sei ρ_1 der reguläre Charakter von E . Für $g \in E$ ist dann

$$\tau_E(g) = \frac{\rho(g^n)}{\text{ggT}(n, |G|)} = \underbrace{\frac{|G : E| \text{ggT}(n, |E|)}{\text{ggT}(n, |G|)}}_{\in \mathbb{N}} \frac{\rho_1(g^n)}{\text{ggT}(n, |E|)}.$$

Wir können also $G = E$ annehmen. Dann ist G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen $G = P_1 \times \dots \times P_s$. Sei ρ_i der reguläre Charakter von P_i . Für $g = x_1 \dots x_s \in G$ ($x_i \in P_i$) gilt dann

$$\tau(G) = \frac{\rho_1(x_1^n)}{\text{ggT}(n, |P_1|)} \cdots \frac{\rho_s(x_s^n)}{\text{ggT}(n, |P_s|)}.$$

Durch Induktion nach s können wir annehmen, dass G eine p -Gruppe ist. Sei $\text{ggT}(n, |G|) = p^a$. Im Fall $p^{a+1} \mid n$ ist $|G| = p^a$ und $\tau(g) = \rho(1)/|G| = 1_G(g)$. Wir können also $n = p^a m$ mit $p \nmid m$ annehmen. Sei $\tau'(g) := \rho(g^{p^a})/p^a$ für $g \in G$. Wenn wir zeigen können, dass τ' ein virtueller Charakter von G ist, so gilt dies auch für τ , denn $\tau(g) = \tau'(g^m)$ für $g \in G$ (siehe Beispiel 6.15). Wir können also $n = p^a$ annehmen. Für $\chi \in \text{Irr}(G)$ müssen wir zeigen: $(\chi, \tau)_G \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 6.6 existieren $H \leq G$ und $\varphi \in \text{Irr}(H)$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\chi = \varphi^G$. Somit genügt zu zeigen:

$$(\chi, \tau)_G = (\varphi, \tau_H)_H = \frac{|G : H|}{p^a} \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a}=1}} \varphi(h) \in \mathbb{Z}.$$

Sei $x \in H$ mit $|\langle x \rangle| = p^b > p^a$, und sei $\varphi(x)$ eine primitive p^c -te Einheitswurzel. Nach Lemma 7.13 ist

$$\sum_{\substack{h \in H, \\ \langle h \rangle = \langle x \rangle}} \varphi(h) = \begin{cases} p^{b-1}(p-1) & \text{falls } c = 0, \\ -p^{b-1} & \text{falls } c = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Da $x \sim y :\Leftrightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$ eine Äquivalenzrelation auf H ist, gilt folgende Kongruenz:

$$|G : H| \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a} = 1}} \varphi(h) \equiv |G : H| \left(\sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a} = 1}} \varphi(h) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a} \neq 1}} \varphi(h) \right) = |G|(\varphi, 1_H)_H \equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Damit ist schließlich gezeigt, dass τ für jede endliche Gruppe G ein virtueller Charakter ist. Wegen $(\chi, \tau)_G \in \mathbb{Z}$ für $\chi \in \text{Irr}(G)$ folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung erhält man durch $\chi = 1_G$. \square

Bemerkung 7.15.

- (i) Ein ähnlicher Beweis zeigt $\text{ggT}(n, |C_G(g)|) \mid \theta_n(g)$ für $g \in G$.
- (ii) Mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen konnte man folgende Vermutung von Frobenius beweisen:

$$\theta_n(1) = n \mid |G| \implies \{g \in G : g^n = 1\} \trianglelefteq G.$$

8 Normale Komplemente

Definition 8.1. Sei \mathbb{P} die Menge aller Primzahlen und $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Wir setzen $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$. Ein Element $x \in G$ heißt π -Element, falls jeder Primteiler von $|\langle x \rangle|$ in π liegt. Analog ist G eine π -Gruppe, falls jeder Primteiler von $|G|$ in π liegt.

Bemerkung 8.2.

- (i) Nach Lagrange und Cauchy ist G genau dann eine π -Gruppe, wenn jedes Element in G ein π -Element ist.
- (ii) Sei $x \in G$. Bekanntlich besitzt $\langle x \rangle$ für jede Primzahl p genau eine (normale) p -Sylowgruppe S_p . Insbesondere ist $\langle x \rangle = \prod_{p \in \mathbb{P}} S_p$. Folglich existieren eindeutig bestimmte $x_p \in S_p$ mit $x = \prod_{p \in \mathbb{P}} x_p$. Man nennt x_p den p -Faktor von x . Für $\pi \subseteq \mathbb{P}$ sei $x_\pi := \prod_{p \in \pi} x_p$. Dann ist x_π der π -Faktor von x . Offenbar ist $x = x_\pi x_{\pi'}$.

Satz 8.3 (BRAUER-DADE). Sei $N \trianglelefteq H \leq G$ und $\pi \subseteq \mathbb{P}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) H/N ist eine π -Gruppe.
- (ii) $|G : H|$ ist durch keine Primzahl in π teilbar.
- (iii) Sind $x, y \in H$ konjugiert in G , so sind xN, yN konjugiert in H/N .
- (iv) Ist h ein π -Element in $H \setminus N$ und $P \in \text{Syl}_p(C_G(h))$ für eine Primzahl $p \in \pi$ mit $p \nmid |\langle h \rangle|$, so ist $\langle h \rangle P$ zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler $M \trianglelefteq G$ mit $G = HM$ und $H \cap M = N$.

Bemerkung 8.4. Hat man die Existenz von M bereits bewiesen, so kann man $\text{Irr}(G/M)$ aus $\text{Irr}(H/N)$ und dem Isomorphismus $G/M = HM/M \cong H/H \cap M = H/N$ konstruieren. Im Beweis von Satz 8.3 geht man umgekehrt vor und konstruiert zunächst die Inflation der Charaktere in $\text{Irr}(G/M)$ und erhält M als Durchschnitt der Kerne dieser Charaktere (vgl. Beweis von Satz 5.6).

Beweis. Sei $\text{Cl}(H/N) = \{C_1, \dots, C_k\}$ und $C_1 = \{1\}$. Für $i = 1, \dots, k$ sei

$$B_i := \{h \in H : hN \in C_i\},$$

also $B_1 = N$ und $H = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Für $i = 2, \dots, k$ sei

$$A_i := \{g \in G : g_\pi \text{ ist konjugiert zu einem Element in } B_i\}.$$

Mit $A_1 := G \setminus \bigcup_{i=2}^k A_i$ ist also $G = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Für $i = 1, \dots, k$ ist A_i eine Vereinigung von Konjugationsklassen in G .

Behauptung 1: $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^k A_i$.

Beweis: Sei $g \in A_i \cap A_j$ und o. B. d. A. $i \neq 1 \neq j$, dann ist g_π zu einem Element $h_i \in B_i$ und einem Element $h_j \in B_j$ konjugiert. Folglich existiert ein $x \in G$ mit $xh_i x^{-1} = h_j$. Wegen (iii) sind dann $h_i N$ und $h_j N$ in H/N konjugiert, d. h. $i = j$.

Behauptung 2: $A_i \cap H = B_i$.

Beweis: Sei zunächst $i \geq 2$ und $h = h_\pi h_{\pi'} \in B_i$. Dann ist $h_{\pi'} \in N$ nach (i), also $hN = h_\pi N$ und damit $h_\pi \in B_i$ und $h \in A_i \cap H$. Ist umgekehrt $h \in A_i \cap H$, so ist h_π konjugiert zu einem Element in B_i . Folglich ist $hN = h_\pi N \in C_i$ wegen (iii) und damit $h \in B_i$. Nach Definition ist $A_1 \cap H = H \setminus \bigcup_{i=2}^k (A_i \cap H) = H \setminus \bigcup_{i=2}^k B_i = B_1$.

Für $p \in \pi$ enthält H wegen (ii) eine p -Sylowgruppe von G . Daher ist jedes p -Element $x \in G$ zu einem Element $y \in H$ konjugiert. Wir sagen, dass x im Fall $y \in H \setminus N$ vom Typ I und im Fall $y \in N$ vom Typ II ist. Nach (iii) ist x entweder vom Typ I oder vom Typ II, aber nicht beides. Für jedes $g \in G$ setzen wir

$$\alpha(g) := \prod_{\substack{p \in \pi, \\ g_p \text{ vom Typ I}}} g_p \quad \text{und} \quad \beta(g) := \prod_{\substack{p \in \pi, \\ g_p \text{ vom Typ II}}} g_p.$$

Dann ist $g = \alpha(g)\beta(g)g_{\pi'}$.

Behauptung 3: Für jedes $g \in G$ mit $\alpha(g) \neq 1$ ist g_{π} zu einem Element in $H \setminus N$ konjugiert.

Beweis: Ist g_{π} ein p -Element für eine Primzahl p , so ist g_{π} vom Typ I wegen $\alpha(g) \neq 1$, und wir sind fertig. Ist g_{π} kein p -Element, so existiert ein Primteiler p von $|\langle g_{\pi} \rangle|$ mit $g_{\pi} = xg_p$ und $\alpha(x) \neq 1$ für $x := g_{\pi \setminus \{p\}}$. Folglich existiert ein $q \in \pi \setminus \{p\}$, sodass g_q vom Typ I ist. Argumentieren wir durch Induktion nach der Anzahl der Primfaktoren von $|\langle g_{\pi} \rangle|$, so können wir annehmen, dass x zu einem Element in $H \setminus N$ konjugiert ist. Indem wir g durch ein Konjugiertes ersetzen, können wir sogar $x \in H \setminus N$ annehmen. Sei $P \in \text{Syl}_p(C_G(x))$ mit $g_p \in P$. Nach (iv) ist $\langle x \rangle P$ zu einer Untergruppe von H konjugiert. Insbesondere ist $g_{\pi} = xg_p$ zu einem Element $h \in H$ konjugiert. Im Fall $h \in N$ wäre $h_q \in N$. Dann wäre aber g_q vom Typ II. Also ist $h \notin N$, und die Behauptung ist bewiesen.

Behauptung 4: $A_1 = \{g \in G : \alpha(g) = 1\}$.

Beweis: Ist nämlich $g \in G$ mit $\alpha(g) \neq 1$, so ist $g \in A_i$ für ein $i \in \{2, \dots, k\}$ nach Behauptung 3. Ist umgekehrt $g \in A_i$ für ein $i \in \{2, \dots, k\}$, so ist g_{π} zu einem Element $h \in B_i$ konjugiert. Folglich ist $\alpha(g)$ zu $\alpha(h)$ und $\beta(g)$ zu $\beta(h)$ konjugiert. Jeder p -Faktor y von $\beta(h)$ liegt also in H und ist zu einem Element in N konjugiert. Nach (iii) ist also $y \in N$. Dies zeigt: $\beta(h) \in N$. Folglich ist $\alpha(h)N = \alpha(h)\beta(h)N = hN \in C_i$ und damit $\alpha(h) \in B_i$. Insbesondere ist $\alpha(h) \neq 1$ und $\alpha(g) \neq 1$.

Behauptung 5: $g \in A_i \implies \alpha(g), g_{\pi} \in A_i$.

Beweis: Für $g \in A_i$ ist $g_{\pi} \in A_i$ nach Definition von A_i . Für $i = 1$ ist $\alpha(g) = 1 \in B_1 \subseteq A_1$ nach Behauptung 4. Sei also $i \geq 2$. Dann ist wie oben $\alpha(g)$ konjugiert zu einem Element $\alpha(h) \in B_i \subseteq A_i$, also auch $\alpha(g) \in A_i$.

Behauptung 6: $\alpha(g) = 1 \implies \alpha(g^n) = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Für $\alpha(g) = 1$ ist jeder p -Faktor (für $p \in \pi$) von g zu einem Element in N konjugiert. Daher ist auch jeder p -Faktor von g^n zu einem Element von N konjugiert. Dies zeigt $\alpha(g^n) = 1$.

Behauptung 7: Ist $E = U \times Q \leq G$ eine π -Untergruppe mit $U = \langle u \rangle$, $\alpha(u) \neq 1$ und $Q \in \text{Syl}_p(E)$, so ist E zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Beweis: Wegen $\alpha(u) \neq 1$ ist $u = u_{\pi}$ zu einem Element in $H \setminus N$ konjugiert (Behauptung 3). Indem wir E durch ein Konjugiertes ersetzen, können wir also $u \in H \setminus N$ annehmen. Dann folgt die Behauptung aus (iv).

Sei $\text{Irr}(H/N) = \{\psi_1, \dots, \psi_k\} \subseteq \text{Irr}(H)$. Für $i = 1, \dots, k$ ist dann ψ_i konstant auf jedem B_j und besitzt genau eine Fortsetzung $\chi_i \in \text{CF}(G)$, die konstant auf jedem A_j ist. Wir zeigen $\chi_i \in \text{Irr}(G)$ mit Satz 6.8. Dazu sei $E = E_{\pi} \times E_{\pi'} \leq G$ elementar, wobei E_{π} eine π -Gruppe und $E_{\pi'}$ eine π' -Gruppe ist. Für $x \in E$ ist $x_{\pi} \in E_{\pi}$ und $\chi_i(x) = \chi_i(x_{\pi})$, denn x und x_{π} liegen im gleichen A_j (Behauptung 5). Daher ist $(\chi_i)_E = (\chi_i)_{E_{\pi}} 1_{E_{\pi'}}$, und wir können $E = E_{\pi}$ annehmen (Aufgabe 17). Sei $E = U \times Q$ mit $U = \langle u \rangle$ und $Q \in \text{Syl}_p(E)$ ist. Im Fall $\alpha(u) \neq 1$ können wir E durch ein Konjugiertes ersetzen und $E \leq H$ annehmen (Behauptung 7). Dann ist $(\chi_i)_E = (\psi_i)_E$ ein Charakter von E . Sei also $\alpha(u) = 1$. Sei $x = u^n v \in E$ mit $v \in Q$. Nach Behauptung 6 ist $\alpha(x) = \alpha(u^n v) = \alpha(u^n)\alpha(v) = \alpha(v)$ und

$$\chi_i(x) = \chi_i(\alpha(x) \underbrace{\beta(x)}_{\in \text{Ker}(\chi_i)}) = \chi_i(\alpha(x)) = \chi_i(\alpha(v)) = \chi_i(v).$$

Dies zeigt $(\chi_i)_E = 1_U(\chi_i)_Q$ und wir können $E = Q$ annehmen. Nach Sylow können wir $E \leq H$ annehmen. Dann ist aber $(\chi_i)_E = (\psi_i)_E$ ein Charakter von E . Also ist χ_i ein virtueller Charakter von G .

Für $i = 1, \dots, k$ sei $b_i \in B_i$ und $\theta_i := \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1})\chi_j$. Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation für H/N ist

dann

$$\begin{aligned} (\theta_i, 1_G)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta_i(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1}) \chi_j(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{r=1}^k |A_r| \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1}) \psi_j(b_r) \\ &= \frac{|A_i|}{|G|} |C_{H/N}(b_i N)| = \frac{|A_i|}{|G|} \frac{|H : N|}{|C_i|} = \frac{|A_i|}{|G : H| \cdot |C_i| |N|} = \frac{|A_i|}{|G : H| |B_i|} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Andererseits sind die Vielfachheiten der irreduziblen Bestandteile von θ_i offenbar ganz-algebraisch. Nach Lemma 3.5 ist also $(\theta_i, 1_G)_G = \frac{|A_i|}{|G : H| |B_i|} \in \mathbb{N}$ und $|A_i| \geq |G : H| |B_i|$. Daher ist

$$|G| = \sum_{i=1}^k |A_i| \geq |G : H| \sum_{i=1}^k |B_i| = |G : H| |H| = |G|.$$

Für $i = 1, \dots, k$ ist also $|A_i| = |G : H| |B_i|$. Folglich ist

$$\begin{aligned} (\chi_i, \chi_i)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_i(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^k |A_j| \psi_i(b_j) \psi_i(b_j^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{j=1}^k |B_j| \psi_i(b_j) \psi_i(b_j^{-1}) = (\psi_i, \psi_i)_H = 1. \end{aligned}$$

Wegen $\chi_i(1) = \psi_i(1) > 0$ ist somit $\chi_i \in \text{Irr}(G)$ nach Satz 6.8. Wegen $B_1 = N = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\psi_i)$ ist $A_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\chi_i)$. Für $x \in B_i \subseteq A_i$ mit $i \geq 2$ existiert ein ψ_j mit $\chi_j(x) = \psi_j(x) \neq \psi_j(1) = \chi_j(1)$. Also ist $A_1 = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\chi_i) \trianglelefteq G$ mit $A_1 \cap H = B_1 = N$. Wegen $|A_1| = |G : H| |B_1| = |G : H| |N|$ ist

$$|A_1 H| = \frac{|A_1| |H|}{|A_1 \cap H|} = \frac{|G| |N|}{|N|} = |G|.$$

Dies zeigt $A_1 H = G$, und wir sind fertig. □

Satz 8.5 (DADE). Sei $N \trianglelefteq H \leq G$ und $\pi \subseteq \mathbb{P}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) H/N ist eine π -Gruppe.
- (ii) Sind $x, y \in H$ konjugiert in G , so sind xN, yN konjugiert in H/N .
- (iii) Jede elementare π -Untergruppe von G ist zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler M von G mit $G = HM$ und $H \cap M = N$.

Beweis. Sei $p \in \pi$ und $P \in \text{Syl}_p(G)$. Da P elementar ist, ist P zu einer Untergruppe von H konjugiert, also $p \nmid |G : H|$. Damit erfüllt G die Voraussetzungen von Satz 8.3, und wir sind fertig. □

Satz 8.6 (BRAUER-SUZUKI). Sei $\pi \subseteq \mathbb{P}$ und H eine π -Untergruppe von G mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Sind $x, y \in H$ konjugiert in G , so auch in H .
- (ii) Jede elementare π -Untergruppe von G ist zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler M von G mit $G = HM$ und $H \cap M = 1$.

Beweis. Satz 8.5 mit $N := 1$. □

Lemma 8.7. Sei P eine p -Gruppe und $U < P$. Dann ist $U < N_P(U)$.

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach $|P|$. Im Fall $|P| = p$ ist $1 = U < N_P(U) = P$. Sei also $|P| > p$. Wegen $Z(P) \subseteq N_P(U)$ können wir $Z(P) \subseteq U$ annehmen. Nach Algebra 1 ist $Z(P) \neq 1$. Sei $\bar{P} := P/Z(P)$ und $\bar{U} := U/Z(P)$. Nach Induktion ist dann $\bar{U} < N_{\bar{P}}(\bar{U})$. Also existiert ein $x \in P \setminus U$ mit $xUx^{-1}/Z(P) = \bar{x}\bar{U}\bar{x}^{-1} = \bar{U} = U/Z(P)$. Es folgt $x \in N_P(U)$. □

Bemerkung 8.8. Der folgende Satz verallgemeinert Satz 5.6.

Satz 8.9 (WIELANDT). Sei $N \trianglelefteq H \leq G$. Ferner sei $H \cap xHx^{-1} \subseteq N$ für alle $x \in G \setminus H$. Dann existiert ein Normalteiler M von G mit $G = HM$ und $H \cap M = N$.

Beweis. Bezeichnet man mit π die Menge der Primteiler von $|H/N|$, so ist Satz 8.3(i) erfüllt. Sei $p \in \pi$, $Q \in \text{Syl}_p(H)$ und $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $Q \subseteq P$. Bekanntlich ist $QN/N \in \text{Syl}_p(H/N)$, also $QN/N \neq 1$ wegen $p \mid |H/N|$. Folglich ist $Q \not\subseteq N$. Für $g \in N_P(Q)$ ist $Q = gQg^{-1} \subseteq H \cap gHg^{-1}$. Wegen $Q \not\subseteq N$ folgt $g \in H$. Daher ist $N_P(Q) \subseteq H \cap P = Q$ und damit $P = Q$ nach Lemma 8.7. Folglich ist $p \nmid |G : H|$, und Satz 8.3(ii) ist erfüllt. Seien $x, y \in H$ und $g \in G$ mit $y = gxg^{-1}$. Im Fall $g \in H$ ist $yN = (gN)(xN)(gN)^{-1}$. Sei also $g \notin H$. Dann ist $y = gxg^{-1} \in H \cap gHg^{-1} \subseteq N$ und analog $x \in N$, also $yN = 1 = xN$ in H/N . Damit ist Satz 8.3(iii) erfüllt. Sei schließlich $x \in H \setminus N$ und $g \in C_G(x)$. Dann ist $x = gxg^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$, also $g \in H$. Folglich ist $C_G(x) \subseteq H$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 8.3 erfüllt, und die Behauptung folgt. \square

Satz 8.10. Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$. Sind je zwei Elemente in P , die in G konjugiert sind, auch schon in P konjugiert, so besitzt P ein normales Komplement in G .

Beweis. Folgt nach Sylow und Satz 8.6 mit $\pi = \{p\}$ und $H = P$. \square

Satz 8.11 (BURNSIDES Verlagerungssatz). Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $N_G(P) = C_G(P)$. Dann besitzt P ein normales Komplement in G .

Beweis. Wegen $P \subseteq N_G(P) = C_G(P)$ ist P abelsch. Seien $x, y \in P$ und $g \in G$ mit $gxg^{-1} = y$. Dann ist $P \leq C_G(x)$ und $g^{-1}Pg \leq g^{-1}C_G(y)g = C_G(g^{-1}yg) = C_G(x)$. Nach Sylow existiert ein $c \in C_G(x)$ mit $cPc^{-1} = g^{-1}Pg$. Also ist $gc \in N_G(P) = C_G(P) \leq C_G(x)$. Somit ist $g \in C_G(x)$ und $y = gxg^{-1} = x$. Nun folgt die Behauptung aus Satz 8.10. \square

Bemerkung 8.12. Üblicherweise beweist man Satz 8.11 in der Gruppentheorie mittels Verlagerung.

Satz 8.13. Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$, und sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ zyklisch. Dann besitzt P ein normales Komplement in G .

Beweis. Wie üblich operiert $N_G(P)$ durch Konjugation auf P . Dies liefert einen Homomorphismus $N_G(P) \rightarrow \text{Aut}(P)$ mit Kern $C_G(P)$. Also ist $N_G(P)/C_G(P)$ zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(P)$ isomorph. Da P zyklisch ist, gilt $P \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. In der Algebra 1 zeigt man $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Dies zeigt $|N_G(P)/C_G(P)| \mid |\text{Aut}(P)| = \varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$. Da P zyklisch ist, gilt $P \subseteq C_G(P)$ und $|N_G(P)/C_G(P)| \mid p-1$. Da p der kleinste Primteiler von $|G|$ ist, ist sogar $N_G(P) = C_G(P)$, und die Behauptung folgt aus Burnside's Verlagerungssatz. \square

Beispiel 8.14. Sei $P \in \text{Syl}_2(G)$ zyklisch. Nach Satz 8.13 besitzt P ein normales Komplement N in G . Nach Feit-Thompson ist N auflösbar. Wegen $G/N = PN/N \cong P/P \cap N \cong P$ ist damit auch G auflösbar. Wir beweisen eine schwächere Aussage ohne den Satz von Feit und Thompson.

Satz 8.15. Sind alle Sylowgruppen von G zyklisch, so ist G auflösbar.

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach $|G|$. O. B. d. A. sei $G \neq 1$. Sei p der kleinste Primteiler von G und $P \in \text{Syl}_p(G)$. Nach Satz 8.13 existiert ein $N \trianglelefteq G$ mit $G = PN$ und $P \cap N = 1$. Jede Sylowgruppe von N liegt in einer Sylowgruppe von G und ist damit zyklisch. Nach Induktion ist also N auflösbar. Bekanntlich ist auch jede p -Gruppe auflösbar. Mit N und $G/N = PN/N \cong P/P \cap N \cong P$ ist also auch G auflösbar. \square

Bemerkung 8.16. In der Situation von Satz 8.15 kann man weiter zeigen, dass G' und G/G' zyklisch sind (ohne Beweis). Insbesondere ist $G'' = 1$.

Beispiel 8.17. Gruppen quadratfreier Ordnung sind auflösbar.

Satz 8.18 (FROBENIUS). Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ und für jede Untergruppe $1 \neq Q \leq P$ sei $N_G(Q)/C_G(Q)$ eine p -Gruppe. Dann besitzt P ein normales Komplement in G .

Beweis. Nach Sylow gilt die Voraussetzung für alle $P \in \text{Syl}_p(G)$. Sei Γ die Menge der Paare (P, Q) mit $P, Q \in \text{Syl}_p(G)$, sodass ein $c \in C_G(P \cap Q)$ mit $P = cQc^{-1}$ existiert. Wir zeigen, dass Γ alle Paare von Sylowgruppen enthält. Sei $P, P_1 \in \text{Syl}_p(G)$ mit $(P, P_1) \notin \Gamma$, sodass $|P \cap P_1|$ maximal ist. Offenbar ist dann $D := P \cap P_1 < P$ (anderenfalls könnte man $c = 1$ wählen). Sei $N := N_G(D)$ und $P \cap N \subseteq S \in \text{Syl}_p(N)$ sowie $P_1 \cap N \subseteq T \in \text{Syl}_p(N)$. Schließlich sei $S \subseteq R \in \text{Syl}_p(G)$. Da $SC_G(D)/C_G(D)$ eine p -Sylowgruppe von $N/C_G(D)$ ist, impliziert die Voraussetzung $N = SC_G(D)$. Nach Sylow existiert ein $n \in N$ mit $T = nSn^{-1}$. Wegen $N = SC_G(D) = C_G(D)S$ können wir $n \in C_G(D)$ annehmen. Nach Lemma 8.7 ist

$$D < N_P(D) = N \cap P \subseteq S \cap P \subseteq R \cap P.$$

Nach Wahl von (P, P_1) existiert ein $x \in C_G(P \cap R) \subseteq C_G(D)$ mit $P = xRx^{-1}$. Analog ist auch

$$D < N_{P_1}(D) = N \cap P_1 \subseteq T \cap P_1 = nSn^{-1} \cap P_1 \subseteq nRn^{-1} \cap P_1$$

und es existiert ein $y \in C_G(nRn^{-1} \cap P_1) \subseteq C_G(D)$ mit $nRn^{-1} = yP_1y^{-1}$. Insgesamt ist also $P = xRx^{-1} = xn^{-1}yP_1y^{-1}nx^{-1}$ mit $xn^{-1}y \in C_G(D) = C_G(P \cap P_1)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass Γ alle Paare (P, Q) mit $P, Q \in \text{Syl}_p(G)$ enthält.

Seien nun $x, y \in P$ und $g \in G$ mit $y = gxg^{-1}$. Dann ist $y \in P \cap gPg^{-1}$. Nach dem eben gezeigten existiert ein $c \in C_G(P \cap gPg^{-1}) \subseteq C_G(y)$ mit $cPc^{-1} = gPg^{-1}$. Da $PC_G(P)/C_G(P)$ eine p -Sylowgruppe von $N_G(P)/C_G(P)$ ist, folgt $N_G(P) = PC_G(P)$ nach Voraussetzung. Also ist $c^{-1}g = ab$ mit $a \in P$ und $b \in C_G(P) \subseteq C_G(x)$. Dann ist $y = c^{-1}yc = c^{-1}gxc^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = axa^{-1}$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 8.10. \square

Satz 8.19 (Satz von der Fokalgruppe). *Für $P \in \text{Syl}_p(G)$ ist*

$$P \cap G' = \langle xy^{-1} : x, y \in P \text{ sind in } G \text{ konjugiert} \rangle.$$

Beweis. Sind $x, y \in P$ in G konjugiert, so existiert ein $g \in G$ mit $xy^{-1} = xgx^{-1}g^{-1} = [x, g]$. Dies zeigt $P_1 := \langle xy^{-1} : x, y \in P \text{ sind in } G \text{ konjugiert} \rangle \subseteq P \cap G'$. Für $x, y \in P$ ist umgekehrt $[x, y] = x(yx^{-1}y^{-1}) = x(yxy^{-1})^{-1} \in P_1$. Also ist $P' \subseteq P_1 \trianglelefteq P$ und P/P_1 ist abelsch. Sei $\lambda \in \text{Irr}(P/P_1) \subseteq \text{Irr}(P)$. Sei $g \in G$. Dann existiert ein $x \in G$ mit $xg_px^{-1} \in P$. Wir definieren $\psi(g) := \lambda(xg_px^{-1})$. Ist auch $yg_py^{-1} \in P$ für ein $y \in G$, so gilt

$$(xg_px^{-1})(yg_py^{-1}) = (xg_px^{-1})yx^{-1}(xg_px^{-1})^{-1}xy^{-1} \in P_1 \leq \text{Ker}(\lambda).$$

Daher ist $\lambda(xg_px^{-1}) = \lambda(yg_py^{-1})$ und ψ ist wohldefiniert. Das gleiche Argument zeigt auch $\psi \in \text{CF}(G)$. Wir zeigen $\psi \in \text{Irr}(G)$ mit Satz 6.8. Sei dafür $E \leq G$ elementar und $g, h \in E$. Da E das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist, gilt $(gh)_p = g_ph_p$ und $\langle g_p, h_p \rangle$ ist eine p -Gruppe. Also existiert ein $x \in G$ mit $x\langle g_p, h_p \rangle x^{-1} \leq P$. Dann ist

$$\psi(gh) = \lambda(x(gh)_p x^{-1}) = \lambda(xg_px^{-1}xh_px^{-1}) = \lambda(xg_px^{-1})\lambda(xh_px^{-1}) = \psi(g)\psi(h).$$

Wegen $\psi(1) = \lambda(1) = 1$ ist $\psi_E \in \text{Irr}(E)$. Wegen $|\psi(g)| = 1$ für alle $g \in G$ gilt auch $(\psi, \psi)_G = 1$. Nach Satz 6.8 ist also $\psi \in \text{Irr}(G)$. Sei nun $g \in P \setminus P_1$. Durch geeignete Wahl von λ können wir $\psi(g) = \lambda(g) \neq 1$ annehmen. Wegen $\psi(1) = 1$ ist also $g \notin P \cap G' \leq G' \leq \text{Ker}(\psi)$. \square

9 Nullen in der Charaktertafel

Satz 9.1 (BURNSIDE). Sei $\chi \in \text{Irr}(G)$ mit $\chi(1) > 1$. Dann existiert ein $g \in G$ mit $\chi(g) = 0$.

Beweis. Nehmen wir $\chi(g) \neq 0$ für alle $g \in G$ an. Sei $\zeta := e^{2\pi i/|G|} \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{G} := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ mit $\gamma(\zeta) = \zeta^m$ gilt $\gamma(\chi(g)) = \chi(g^m)$ nach Beispiel 6.15. Wegen $\text{ggT}(|G|, m) = 1$ ist die Abbildung $g \mapsto g^m$ eine Bijektion auf $G \setminus \{1\}$. Da \mathcal{G} abelsch ist, gilt $\gamma(\chi(g)\overline{\chi(g)}) = \chi(g^m)\overline{\chi(g^m)}$. Also ist $\omega := \prod_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 > 0$ im Fixkörper von \mathcal{G} , d. h. in \mathbb{Q} . Andererseits ist ω ganz-algebraisch und es folgt $\omega \in \mathbb{Z}$ aus Lemma 3.5. Insbesondere ist $\omega \geq 1$ und die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zeigt

$$\frac{1}{|G|-1} \sum_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \omega^{\frac{1}{|G|-1}} \geq 1.$$

Also ist

$$|G| = |G|(\chi, \chi)_G = \chi(1)^2 + \sum_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \chi(1)^2 + |G| - 1$$

und wir erhalten die Widerspruch $\chi(1) = 1$. □

Bemerkung 9.2. Für $\chi(1) = 1$ gilt offenbar $\chi(g) \neq 0$ für alle $g \in G$. Der nächste Satz zeigt, wo man Nullen in der Charaktertafel finden kann.

Satz 9.3 (BRAUER). Sei $\chi \in \text{Irr}(G)$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$. Dann ist $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G$ mit $p \mid |\langle g \rangle|$.

Beweis. Wir definieren eine Klassenfunktion θ auf G durch

$$\theta(g) := \begin{cases} \chi(g) & \text{falls } p \nmid |\langle g \rangle|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass θ ein virtueller Charakter ist. Dazu sei $E = P \times Q \leq G$ elementar mit $P \in \text{Syl}_p(E)$ (man beachte, dass E nicht unbedingt p -elementar ist). Dann ist $\theta(x) = 0$ für alle $x \in E \setminus Q$ und $\theta(x) = \chi(x)$ für $x \in Q$. Für $\psi \in \text{Irr}(E)$ ist also

$$|P|(\theta_E, \psi)_E = \frac{1}{|Q|} \sum_{x \in Q} \chi(x)\psi(x^{-1}) = (\chi_Q, \psi_Q)_Q \in \mathbb{Z}.$$

Sei $g \in K \in \text{Cl}(G)$ und $\omega(g) := \omega_\chi(K) = \frac{|K|\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{|G|\chi(g)}{|C_G(g)|\chi(1)}$ (siehe Lemma 1.23). Dann ist

$$|E|(\theta_E, \psi)_E = \sum_{x \in Q} \chi(x)\psi(x^{-1}) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in Q} \omega(x)\psi(x^{-1})|C_G(x)|.$$

Für $x \in Q$ ist $P \subseteq C_G(x)$. Daher ist

$$\frac{|G||Q|}{\chi(1)}(\theta_E, \psi)_E = \sum_{x \in Q} \omega(x)\psi(x^{-1})|C_G(x) : P|$$

eine ganz-algebraische Zahl in \mathbb{Q} nach Lemma 3.6. Folglich ist

$$\frac{|G||Q|}{\chi(1)}(\theta_E, \psi)_E \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $\frac{|G||Q|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$ und $\text{ggT}(\frac{|G||Q|}{\chi(1)}, |P|) = 1$ ist auch $(\theta_E, \psi)_E \in \mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass θ_E ein virtueller Charakter von E ist. Nach Brauer ist θ ein virtueller Charakter von G (siehe Beweis von Satz 6.8). Insbesondere ist $(\theta, \chi)_G \in \mathbb{Z}$. Andererseits ist

$$0 < \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G, \\ p \nmid |\langle g \rangle|}} \chi(g) \overline{\chi(g)} = (\theta, \chi)_G \leq (\chi, \chi)_G = 1.$$

Daher ist $(\theta, \chi)_G = (\chi, \chi)_G = 1$ und

$$0 = (\chi - \theta, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G, \\ p \nmid |\langle g \rangle|}} |\chi(g)|^2,$$

d. h. $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G$ mit $p \mid |\langle g \rangle|$. □

Bemerkung 9.4. In der Situation von Satz 9.3 sagt man: χ hat *p-Defekt* 0.

10 Endliche lineare Gruppen

Bemerkung 10.1. Besitzt G eine treue Darstellung vom Grad G , so ist G zu einer Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ isomorph. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass G „große“ abelsche Normalteiler besitzt (in Bezug auf n). Im Fall $n = 1$ ist G als Untergruppe von \mathbb{C}^\times sogar zyklisch.

Definition 10.2. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei

$$\|A\| := \sqrt{\mathrm{Spur}(A\bar{A}^T)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Bemerkung 10.3.

- (i) Schreibt man $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in der Form $A = A_1 + A_2i$ mit $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so wird $\mathbb{C}^{n \times n}$ zum euklidischen Raum der Dimension $2n^2$ (über \mathbb{R}) mit der üblichen Norm. Insbesondere gilt

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{und} \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (ii) Sei $U(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \bar{A}^T\} \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ die *unitäre Gruppe* vom Grad n . Für $U, V \in U(n, \mathbb{C})$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist dann

$$\|UAV\|^2 = \mathrm{Spur}(UAV\bar{V}^T\bar{A}^T\bar{U}^T) = \mathrm{Spur}(U(A\bar{A}^T)U^{-1}) = \mathrm{Spur}(U^{-1}UA\bar{A}^T) = \mathrm{Spur}(A\bar{A}^T) = \|A\|^2.$$

- (iii) Eine Version des Spektralsatzes aus der linearen Algebra besagt, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$ eine Matrix $U \in U(n, \mathbb{C})$ existiert, sodass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix ist (siehe zum Beispiel Satz 25.3 in Külshammer, „Lineare Algebra II“, <http://www.minet.uni-jena.de/algebra/skripten/LinAlg2-Kuels-SS05.pdf>). Insbesondere gilt dies falls A unitär oder *hermitesch* ist (d. h. $\bar{A}^T = A$).

Satz 10.4. Jede Darstellung $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist zu einer Darstellung $\Delta' : G \rightarrow U(n, \mathbb{C})$ ähnlich.

Beweis. Die Matrix $M := \sum_{g \in G} \Delta(g)\overline{\Delta(g)}^T$ ist hermitesch. Nach dem Spektralsatz existiert $U \in U(n, \mathbb{C})$ mit $UMU^{-1} = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Wegen $\bar{U}^T = U^{-1}$ ist dann

$$D = UMU^{-1} = \sum_{g \in G} U\Delta(g)U^{-1}\overline{U\Delta(g)U^{-1}}^T = \sum_{g \in G} U\Delta(g)U^{-1} \cdot \overline{U\Delta(g)U^{-1}}^T.$$

Wir können also annehmen, dass M eine Diagonalmatrix ist. Nach Definition sind die Hauptdiagonaleinträge von M reell und positiv. Insbesondere ist $M = P^2$ für ein $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Wie üblich gilt $\Delta(h)M\overline{\Delta(h)}^T = M$ und $(P^{-1}\Delta(h)P)(\overline{P^{-1}\Delta(h)P})^T = 1_n$ für alle $h \in G$. Also ist $P^{-1}\Delta(h)P \in U(n, \mathbb{C})$ für alle $h \in G$. \square

Satz 10.5 (JORDAN). Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Jede endliche Gruppe $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ besitzt einen abelschen Normalteiler $A \trianglelefteq G$ mit $|G : A| \leq f(n)$.

Beweis (TAO). Induktion nach n : Im Fall $n = 1$ können wir sicher $f(1) := 1$ setzen. Sei $n \geq 2$. Die Inklusionsabbildung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist eine Darstellung vom Grad n . Nach Satz 10.4 können wir $G \leq U(n, \mathbb{C})$ annehmen, indem wir G durch xGx^{-1} für ein $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ersetzen.

Sei $\epsilon > 0$ und

$$H := \langle x \in G : \|x - 1\| < \epsilon \rangle.$$

Für $x \in H$ mit $\|x - 1\| < \epsilon$ und $g \in G$ ist $\|g x g^{-1} - 1\| = \|g x g^{-1} - g g^{-1}\| = \|g(x - 1)g^{-1}\| = \|x - 1\| < \epsilon$ nach Bemerkung 10.3. Also ist $H \trianglelefteq G$. Sei $x_1, \dots, x_s \in G$ ein Repräsentantensystem für G/H . Dann ist $\|x_i - x_j\| = \|x_i x_j^{-1} - 1\| \geq \epsilon$ für $i \neq j$. Andererseits gilt $\|x_i\| = \sqrt{\text{Spur}(x_i \bar{x}_i^T)} = \sqrt{\text{Spur}(1_n)} = \sqrt{n}$ für $i = 1, \dots, s$. Die Teilmenge $M := \{x \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|x\| = \sqrt{n}\}$ des euklidischen Raums $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt). Nach dem Satz von Heine-Borel aus Analysis 1 lässt sich M durch endlich viele, sagen wir $g(n)$, offene Kugeln vom Radius $\epsilon/2$ überdecken. In jeder Kugel kann höchstens ein x_i liegen. Insbesondere ist $|G : H| = s \leq g(n)$.

Annahme: $Z(H) \leq \mathbb{C} \times 1_n$.

Im Fall $Z(H) = H$ sind wir fertig mit $A := H$ und $f(n) := g(n)$. Sei also $x \in H \setminus Z(H)$, sodass $\|x - 1\|$ minimal ist (G endlich). Da nicht alle Erzeuger von H in $Z(H)$ liegen können, ist $\|x - 1\| < \epsilon$. Sei außerdem $y \in H$ mit $\|y - 1\| < \epsilon$. Wir wählen $u \in U(n, \mathbb{C})$, sodass $u x u^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist (Spektralsatz). Schreibe $u(x - 1)u^{-1} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $u(y - 1)u^{-1} = (\beta_{ij})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|(x - 1)(y - 1)\|^2 &= \|u(x - 1)u^{-1}u(y - 1)u^{-1}\|^2 = \sum_{i,j} |\alpha_i \beta_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j,k} |\alpha_i|^2 |\beta_{jk}|^2 \\ &= \left(\sum_i |\alpha_i|^2 \right) \left(\sum_{j,k} |\beta_{jk}|^2 \right) = \|u(x - 1)u^{-1}\|^2 \|u(y - 1)u^{-1}\|^2 = \|x - 1\|^2 \|y - 1\|^2. \end{aligned}$$

Analog ist auch $\|(y - 1)(x - 1)\| \leq \|x - 1\| \|y - 1\|$. Es folgt

$$\|x y x^{-1} y^{-1} - 1\| = \|x y - y x\| = \|(x - 1)(y - 1) - (y - 1)(x - 1)\| \leq 2\|x - 1\| \|y - 1\| < 2\epsilon \|x - 1\| < \|x - 1\|$$

für $\epsilon < \frac{1}{2}$. Nach Wahl von x ist also $z := x y x^{-1} y^{-1} \in Z(H)$. Nach der Annahme ist $z = \lambda 1_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Offenbar ist $\det(z) = \det(x y x^{-1} y^{-1}) = 1$, d. h. $\lambda^n = 1$. Insbesondere gibt es nur n Möglichkeiten für λ . Es gilt $|\lambda - 1| \sqrt{n} = \|z - 1\| < \|x - 1\| < \epsilon$. Wählt man ϵ klein genug, so folgt $\lambda = 1$ und $x y x^{-1} y^{-1} = z = 1$. Also ist x mit allen Erzeugern von H vertauschbar. Dies liefert den Widerspruch $x \in Z(H)$.

Also existiert $z \in Z(H) \setminus \mathbb{C} 1_n$. Wegen $z \in U(n, \mathbb{C})$ existiert ein $u \in U(n, \mathbb{C})$ mit

$$d := u z u^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 1_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k 1_{n_k} \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ paarweise verschieden sind (o. B. d. A.). Wegen $z \notin \mathbb{C} 1_n$ gilt $k > 1$. Man zeigt leicht:

$$C_{\text{GL}(n, \mathbb{C})}(d) = \begin{pmatrix} \text{GL}(n_1, \mathbb{C}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{GL}(n_k, \mathbb{C}) \end{pmatrix} \cong \text{GL}(n_1, \mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}(n_k, \mathbb{C}).$$

Somit ist auch $H \leq C_{\text{GL}(n, \mathbb{C})}(z) = u^{-1} C_{\text{GL}(n, \mathbb{C})}(d) u \cong \text{GL}(n_1, \mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}(n_k, \mathbb{C})$. Sei $\pi_i : H \rightarrow \text{GL}(n_i, \mathbb{C})$ die i -te Projektion. Wegen $k > 1$ ist $n_i < n$. Nach Induktion existiert ein abelscher Normalteiler $N_i / \text{Ker}(\pi_i) \leq H / \text{Ker}(\pi_i) \cong \pi_i(H) \leq \text{GL}(n_i, \mathbb{C})$ mit $|H : N_i| = |H / \text{Ker}(\pi_i) : N_i / \text{Ker}(\pi_i)| \leq f(n_i)$. Sei

$$\pi : H \rightarrow H / \text{Ker}(\pi_1) \times \dots \times H / \text{Ker}(\pi_k), \quad g \mapsto (g \text{Ker}(\pi_1), \dots, g \text{Ker}(\pi_k)).$$

Dann ist $\text{Ker}(\pi) = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\pi_i) = 1$. Wir definieren

$$K := \pi^{-1}(N_1 / \text{Ker}(\pi_1) \times \dots \times N_k / \text{Ker}(\pi_k)) = N_1 \cap \dots \cap N_k.$$

Da π injektiv ist, ist K ein abelscher Normalteiler von H . Da auch die Abbildung $H/K \rightarrow H/N_1 \times \dots \times H/N_k$, $gK \mapsto (gN_1, \dots, gN_k)$ injektiv ist, gilt

$$|H : K| \leq |H : N_1| \dots |H : N_k| \leq f(n_1) \dots f(n_k).$$

Die Funktion $h(n) := \max\{f(i) : 1 \leq i \leq n - 1\}^n$ erfüllt also $|H : K| \leq h(n)$. Insgesamt ist $|G : K| = |G : H| |H : K| \leq g(n) h(n)$. Da die Normalteilerrelation nicht transitiv ist, ist allerdings nicht unbedingt $K \leq G$. Wir betrachten daher die Operation $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(G/K)$ mit ${}^g(hK) := ghK$ für $g, h \in G$ (vgl. Beweis von Satz 7.11). Man zeigt leicht, dass $A := \text{Ker}(\varphi) \subseteq K$ gilt. Insbesondere ist A ein abelscher Normalteiler von G mit $|G : A| = |G : \text{Ker}(\varphi)| \leq |\text{Sym}(G/K)| = |G : K|! \leq (g(n)h(n))!$. Die Funktion $f(n) := (g(n)h(n))!$ erfüllt somit die Behauptung. \square

Bemerkung 10.6.

- (i) Wie in Aufgabe 20 zeigt man, dass $G := \text{SL}(2, 5)$ auf der Menge der sechs eindimensionalen Untervektorräume von \mathbb{F}_5^2 mit Kern $Z(G) = \langle -1_2 \rangle$ operiert. Es folgt $\text{SL}(2, 5)/Z(G) \cong A_5$ und $Z(G)$ ist der größte abelsche Normalteiler von G . Außerdem besitzt G einen treuen (irreduziblen) Charakter vom Grad 2. Dies zeigt $f(2) \geq |G : Z(G)| = 60$. Es gilt sogar Gleichheit (ohne Beweis).
- (ii) Collins hat $|G : A| \leq (n+1)!$ für $n \geq 71$ in der Situation von Satz 10.5 gezeigt. Nach Aufgabe 30 ist diese Schranke auch optimal. Der Beweis benutzt allerdings die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

Definition 10.7. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt π -Hallgruppe, falls H eine π -Gruppe ist und kein Primteiler von $|G : H|$ in π liegt. Insbesondere ist $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$.

Beispiel 10.8.

- (i) Die p -Hallgruppen von G sind genau die p -Sylowgruppen.
- (ii) Sei G abelsch und $S_p \in \text{Syl}_p(G)$. Für $\pi \subseteq \mathbb{P}$ ist dann $G_\pi := \prod_{p \in \pi} S_p$ eine π -Hallgruppe von G .
- (iii) A_5 besitzt keine $\{2, 5\}$ -Hallgruppe.
- (iv) Nach Aufgabe 16 sind Frobeniuskerne und Frobeniuskomplemente stets Hallgruppen.

Definition 10.9.

- (i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$.
- (ii) Sei $p \in \mathbb{P}$ und $|G| = mp^a$ mit $p \nmid m$. Ein Charakter χ von G heißt p -rational, falls $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$ für alle $g \in G$ gilt.

Beispiel 10.10. Im Fall $p \nmid |\langle g \rangle|$ ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$ (als Summe von $|\langle g \rangle|$ -ten Einheitswurzeln). Insbesondere ist jeder Charakter p -rational, falls $p \nmid |G|$.

Lemma 10.11. Seien $p \neq q$ Primzahlen, sodass G kein Element der Ordnung pq besitzt. Dann ist jeder Charakter $\chi \in \text{Irr}(G)$ p -rational oder q -rational.

Beweis. Nehmen wir an, dass $\chi \in \text{Irr}(G)$ weder p -rational noch q -rational ist. Wir schreiben $n := |G| = p^a m_p = q^b m_q$ mit $p \nmid m_p$ und $q \nmid m_q$. Sei $\mathcal{G}_p := \text{Gal}(\mathbb{Q}_n | \mathbb{Q}_{m_p})$ und $\mathcal{G}_q := \text{Gal}(\mathbb{Q}_n | \mathbb{Q}_{m_q})$. Dann existieren $\gamma_p \in \mathcal{G}_p$ und $\gamma_q \in \mathcal{G}_q$ mit $\gamma_p \chi \neq \chi \neq \gamma_q \chi$ (siehe Beispiel 6.15).

Ist $g \in G$ mit $p \nmid |\langle g \rangle|$, so ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{m_p}$. Insbesondere ist $\gamma_p(\chi(g)) = \chi(g)$. Analog ist $\gamma_q(\chi(g)) = \chi(g)$ für $q \nmid |\langle g \rangle|$. Da G kein Element der Ordnung pq besitzt, gilt $p \nmid |\langle g \rangle|$ oder $q \nmid |\langle g \rangle|$ für alle $g \in G$. Dies zeigt

$$((\chi - \gamma_p \chi), (\chi - \gamma_q \chi))_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi - \gamma_p \chi)(g) \overline{(\chi - \gamma_q \chi)(g)} = 0.$$

Wegen $\gamma_p \chi, \gamma_q \chi \in \text{Irr}(G)$ ist $(\chi, \gamma_p \chi)_G = (\chi, \gamma_q \chi)_G = 0$. Es folgt der Widerspruch

$$0 = (\chi, \chi)_G + (\gamma_p \chi, \gamma_q \chi)_G \geq 1. \quad \square$$

Lemma 10.12. Für $\text{ggT}(n, m) = 1$ ist $\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}$.

Beweis. Sei $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{nm}}$. Wegen $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(\zeta^m)$ und $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}(\zeta^n)$ ist die Einschränkung

$$\Gamma : \text{Gal}(\mathbb{Q}_{nm} | \mathbb{Q}_n) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}_m | \mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m)$$

ein wohldefinierter Homomorphismus. Sei $\gamma \in \text{Ker}(\Gamma)$. Wegen $\text{ggT}(n, m) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $1 = an + bm$. Dann ist $\gamma(\zeta) = \gamma(\zeta^{an+bm}) = \gamma(\zeta^n)^a \gamma(\zeta^m)^b = \zeta^{na} \zeta^{mb} = \zeta$. Also ist Γ injektiv und

$$\varphi(m) = \frac{\varphi(nm)}{\varphi(n)} = \frac{[\mathbb{Q}_{nm} : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}_n : \mathbb{Q}]} = [\mathbb{Q}_{nm} : \mathbb{Q}_n] = |\text{Gal}(\mathbb{Q}_{nm} | \mathbb{Q}_n)| \leq |\text{Gal}(\mathbb{Q}_m | \mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m)| \leq \varphi(m).$$

Der Hauptsatz der Galoistheorie impliziert die Behauptung. □

Lemma 10.13. Sei χ ein treuer p -rationaler Charakter von G , wobei $p \mid |G|$. Dann ist $\chi(1) \geq p - 1$.

Beweis. O.B.d.A. sei $p \geq 3$. Wir schreiben $|G| = mp^a$ mit $p \nmid m$. Nach Voraussetzung ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$ für alle $g \in G$. Sei $P \leq G$ mit $|P| = p$. Dann hat χ_P Werte in \mathbb{Q}_p . Nach Lemma 10.12 ist also $\chi(x) \in \mathbb{Q}$ für $x \in P$. Da χ treu ist, enthält χ_P einen nichttrivialen Bestandteil $\psi \in \text{Irr}(P)$. Für $1 \neq \gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p|\mathbb{Q})$ ist $\gamma\psi \neq \psi$ ein irreduzibler Bestandteil von $\gamma(\chi_P) = \chi_P$. Wegen $|\text{Gal}(\mathbb{Q}_p|\mathbb{Q})| = p - 1$ besitzt χ_P also mindestens $p - 1$ irreduzible Bestandteile. Dies zeigt die Behauptung. \square

Lemma 10.14 (FRATTINI Argument). Sei $N \trianglelefteq G$ und $P \in \text{Syl}_p(N)$. Dann ist $G = NN_G(P)$.

Beweis. Für $g \in G$ ist $gPg^{-1} \leq gNg^{-1} = N$. Nach Sylow existiert ein $x \in N$ mit $gPg^{-1} = xPx^{-1}$. Also ist $g = x(x^{-1}g) \in NN_G(P)$. \square

Lemma 10.15. Sei G abelsch und $p \mid |G|$. Dann existiert eine Untergruppe $H \leq G$ mit $|G : H| = p$.

Beweis. Da G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist, können wir annehmen, dass G eine p -Gruppe ist. Im Fall $|G| = p$ können wir $H = 1$ wählen. Sei nun $|G| > p$, und sei $x \in G$ ein Element der Ordnung p . Nach Induktion besitzt $G/\langle x \rangle$ eine Untergruppe $H/\langle x \rangle$ mit $|G : H| = |G/\langle x \rangle : H/\langle x \rangle| = p$. \square

Satz 10.16 (BLICHFELDT). Eine endliche Gruppe $G \leq \text{GL}(n, \mathbb{C})$ besitzt eine abelsche π -Hallgruppe für $\pi := \{p \in \mathbb{P} : p > n + 1\}$.

Beweis. Wir argumentieren durch Doppelinduktion nach n und dann nach $|G|$. Im Fall $n = 1$ ist G abelsch und die Behauptung folgt aus Beispiel 10.8(ii). Sei also $n \geq 2$. Sei χ der treue Charakter vom Grad n , der durch die Einbettung $G \hookrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ entsteht.

Behauptung: Jede π -Untergruppe $H \leq G$ ist abelsch.

Sei ψ ein irreduzibler Bestandteil von χ_H . Dann ist $\psi(1) \mid |H|$. Jeder Primteiler p von $\psi(1)$ erfüllt also $n + 1 < p \leq \psi(1) \leq \chi(1) = n$. Folglich ist $\psi(1) = 1$. Also ist χ_H eine Summe von irreduziblen Charakteren ψ_1, \dots, ψ_k vom Grad 1. Somit ist $H' \subseteq \text{Ker}(\psi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\psi_k) = \text{Ker}(\chi_H) = \text{Ker}(\chi) \cap H = 1$ (siehe Aufgabe 9) und H ist abelsch.

Es genügt daher zu zeigen, dass irgendeine π -Hallgruppe existiert.

Behauptung: $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Sei χ reduzibel und $\chi = \chi_1 + \chi_2$ mit $K_i := \text{Ker}(\chi_i)$ für $i = 1, 2$. Dann ist $G/K_i \leq \text{GL}(\chi_i(1), \mathbb{C})$ mit $\chi_i(1) < n$. Nach Induktion besitzt G/K_i abelsche π_i -Hallgruppen mit $\pi_i := \{p \in \mathbb{P} : p > \chi_i(1) + 1\}$ für $i = 1, 2$. Wegen $\pi \subseteq \pi_i$ gibt es auch π -Hallgruppen H_i/K_i von G/K_i für $i = 1, 2$ (Beispiel 10.8(ii)). Gilt $H_i < G$ für ein i , so existiert nach Induktion eine π -Hallgruppe H von H_i . Für alle $p \in \pi$ ist dann $p \nmid |G/K_i : H_i/K_i| |H_i : H| = |G : H_i| |H_i : H| = |G : H|$. Wir können daher $H_i = G$ für $i = 1, 2$ annehmen. Insbesondere ist G/K_i abelsch. Wegen $K_1 \cap K_2 = \text{Ker}(\chi_1) \cap \text{Ker}(\chi_2) = \text{Ker}(\chi) = 1$ ist die Abbildung $G \rightarrow G/K_1 \times G/K_2$, $g \mapsto (gK_1, gK_2)$ injektiv. Insbesondere ist auch G abelsch und die Behauptung folgt aus Beispiel 10.8(ii).

Behauptung: $G' = G$.

Sei $G' < G$. Nach Lemma 10.15 existiert ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $|G : N| = p \in \mathbb{P}$ (denn G/G' ist abelsch). Nach Induktion besitzt N eine π -Hallgruppe H . Im Fall $p \notin \pi$ ist H auch eine π -Hallgruppe von G . Sei also $p \in \pi$. Im Fall $H \trianglelefteq G$ ist HP eine π -Hallgruppe von G , wobei $P \in \text{Syl}_p(G)$. Sei also $H \not\trianglelefteq G$. Dann existiert eine Sylowgruppe Q von H mit $Q \not\trianglelefteq G$ (anderenfalls wäre H als Produkt von Normalteilern auch normal). Dann ist Q auch eine Sylowgruppe von N und das Frattini Argument zeigt $G = NN_G(Q)$. Da H abelsch ist, gilt $H \subseteq N_G(Q)$. Außerdem ist

$$|G : N_G(Q)| = |NN_G(Q) : N_G(Q)| = |N : N \cap N_G(Q)| = |N : N_N(Q)| \mid |N : H|.$$

Insbesondere liegen die Primteiler von $|G : N_G(Q)|$ nicht in π . Wegen $N_G(Q) < G$ besitzt $N_G(Q)$ eine π -Hallgruppe K . Offenbar ist dann K auch eine π -Hallgruppe von G und wir sind fertig.

Behauptung: $Z(G)$ ist eine π' -Gruppe.

Sei $Z \leq Z(G)$ mit $|Z| = p \in \pi$. Nach Satz 2.14 ist $Z \subseteq Z(\chi)$. Sei Δ eine Darstellung mit Charakter χ . Für

$1 \neq x \in Z$ ist dann $\Delta(x) = \lambda 1_n$ für eine p -te Einheitswurzel $\lambda \neq 1$. Wegen $p > n$ ist $\det(\Delta(x)) = \lambda^n \neq 1$. Also ist $\det \Delta \neq 1_G$ im Widerspruch zu $G' = G$.

Sei nun $H \leq G$ eine π -Untergruppe von maximaler Ordnung.

Behauptung: $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$.

Sei $1 \neq x \in H$ ein p -Element. Da $Z(H)$ eine π' -Gruppe ist, gilt $C := C_G(x) < G$. Nach Induktion besitzt C eine π -Hallgruppe K . Da H abelsch ist (siehe oben), gilt $H \subseteq C$ und somit $|H| \leq |K|$. Aus der Maximalität von H folgt $|H| = |K|$. Sei $x \in P \in \text{Syl}_p(G)$. Da P als π -Untergruppe abelsch ist, gilt $P \leq C$ und $p \nmid |G : C|$. Andererseits ist $p \nmid |C : K| = |C : H|$ und $p \nmid |G : C||C : H| = |G : H|$.

Wir dürfen annehmen, dass G mindestens ein π -Element besitzt, d.h. $H \neq 1$ (anderenfalls ist G eine π' -Gruppe und die Behauptung gilt mit $H = 1$). Sei also p ein Primteiler von $|H|$. Wir nehmen an, dass H keine π -Hallgruppe ist. Also existiert ein $q \in \pi$ mit $q \mid |G : H|$.

Behauptung: G besitzt kein Element der Ordnung pq .

Anderenfalls existieren $x, y \in G$ mit $|\langle x \rangle| = p$, $|\langle y \rangle| = q$ und $y \in C_G(x)$. Nach Sylow dürfen wir $x \in H$ annehmen. Mit den obigen Bezeichnungen ist $y \in C$, $q \mid |C|$ und daher $q \mid |K| = |H|$. Dies widerspricht $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$.

Nach Lemma 10.11 ist χ r -rational für ein $r \in \{p, q\}$. Lemma 10.13 impliziert nun $n = \chi(1) \geq r - 1$ im Widerspruch zu $r \in \pi$. \square

Satz 10.17 (WIELANDT). Für $\pi \subseteq \mathbb{P}$ sind je zwei abelsche π -Hallgruppen von G konjugiert.

Beweis. Seien $A, B \leq G$ abelsche π -Hallgruppen. Wir argumentieren durch Induktion nach $|\pi|$. Im Fall $|\pi| \leq 1$ folgt die Behauptung aus dem Satz von Sylow. Sei $|\pi| \geq 2$. Wir schreiben $A = \prod_{p \in \pi} S_p$ und $B = \prod_{p \in \pi} T_p$ mit $S_p, T_p \in \text{Syl}_p(G)$. Sei $q \in \pi$ fest. Nach Induktion existiert ein $g \in G$ mit

$$g \left(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p \right) g^{-1} = \prod_{q \neq p \in \pi} T_p.$$

Ersetzt man A durch gAg^{-1} , so kann man $S_p = T_p$ für alle $p \neq q$ annehmen. Offenbar ist dann $S_q, T_q \in \text{Syl}_q(N_G(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p))$. Nach Sylow existiert ein $h \in N_G(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p)$ mit $hS_qh^{-1} = T_q$. Dann ist

$$hAh^{-1} = hS_qh^{-1}h \left(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p \right) h^{-1} = T_q \prod_{q \neq p \in \pi} S_p = B. \quad \square$$

Beispiel 10.18. Im Allgemeinen sind zwei π -Hallgruppen von G nicht konjugiert. Sei zum Beispiel $G := \text{GL}(3, 2)$ und

$$H := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & * & \\ 0 & \text{GL}(2, 2) & \end{pmatrix} \leq G, \quad K := \begin{pmatrix} \text{GL}(2, 2) & * \\ & 1 \end{pmatrix} \leq G.$$

Wegen $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ und $|H| = |K| = 24$ sind H und K $\{2, 3\}$ -Hallgruppen von G . Nehmen wir an, dass ein $g \in G$ mit $gHg^{-1} = K$ existiert. Sei $e_1 := (1, 0, 0)$ und $g \cdot e_1 = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{F}_2^3$. Für alle $x \in K$ ist dann

$$x(\alpha, \beta, \gamma) = g \underbrace{(g^{-1}xg)}_{\in H} e_1 = g \cdot e_1 = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ folgt $\beta = \gamma = 0$. Aus $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ folgt nun der Widerspruch $\alpha = 0$. Somit sind H und K nicht in G konjugiert.

Satz 10.19 (BRAUER-BURNSIDE). Sei θ ein treuer Charakter von G , der genau r verschiedene Werte a_1, \dots, a_r annimmt. Dann tritt unter den irreduziblen Bestandteilen von $\theta^0 = 1_G, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{r-1}$ jeder irreduzible Charakter von G auf.

Beweis. Sei $\chi \in \text{Irr}(G)$ kein irreduzibler Bestandteil von $\theta^0, \theta, \dots, \theta^{r-1}$, und sei $A_j := \{g \in G : \theta(g) = a_j\}$ für $j = 1, \dots, r$. Dann ist

$$0 = |G|(\theta^s, \chi)_G = \sum_{g \in G} \theta^s(g) \chi(g^{-1}) = \sum_{j=1}^r a_j^s \sum_{g \in A_j} \chi(g^{-1})$$

für $s = 0, \dots, r-1$. Daher ist $(\sum_{g \in A_1} \chi(g^{-1}), \dots, \sum_{g \in A_r} \chi(g^{-1}))$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & \cdots & a_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

Matrizen dieser Form (Vandermonde-Matrix) sind bekanntlich invertierbar. Folglich ist $\sum_{g \in A_j} \chi(g^{-1}) = 0$ für $j = 1, \dots, r$. Sei $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $1 \in A_j$, also $a_j = \theta(1)$. Da θ treu ist, ist $A_j = \{1\}$, und man hat den Widerspruch $\chi(1) = 0$. \square

Beispiel 10.20. Für den regulären Charakter θ von G gilt $r = 2$ in Satz 10.19 (falls $G \neq 1$). Tatsächlich wissen wir bereits, dass jeder irreduzible Charakter in $\theta = \theta^{r-1}$ vorkommt.

11 Die Charaktere von S_n und A_n

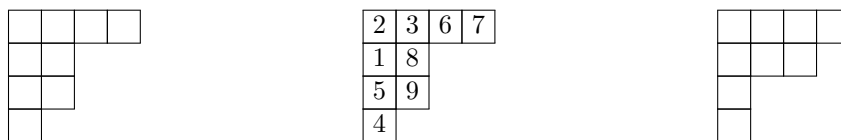
Bemerkung 11.1.

- (i) Nach Aufgabe 27 sind zwei Elemente in S_n genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben. Folglich kann man die Menge der Konjugationsklassen mit den Partitionen von n identifizieren. Dabei ist eine *Partition* von n eine Folge von natürlichen Zahlen $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$.
- (ii) Im Folgenden werden wir die Charaktertafel von S_n berechnen, indem wir auch die irreduziblen Charaktere mit den Partitionen identifizieren. Nach Aufgabe 27 ist dies eine ganzzahlige Matrix.

Definition 11.2.

- (i) Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von n . Das *Young-Diagramm* von λ ist eine Anordnung von n Boxen mit λ_i Boxen in der i -ten Zeile. Durch Spiegelung an der Diagonalen erhält man das *entgegengesetzte* Young-Diagramm mit Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$ mit $\lambda'_i := |\{j : \lambda_j \geq i\}|$ für $i = 1, \dots, l$. Sicher ist $\lambda'' = \lambda$ (vgl. Beispiel 11.3).
- (ii) Ein *Young-Tableau* (von λ) ist ein mit den Zahlen $1, \dots, n$ ausgefülltes Young-Diagramm (von λ), wobei in jeder Zeile die Zahlen aufsteigend sortiert sind.

Beispiel 11.3. Sei $\lambda = (4, 2, 2, 1) = (4, 2^2, 1)$ eine Partition von 9. Dann sind das Young-Diagramm von λ , ein Young-Tableau und das entgegengesetzte Young-Diagramm gegeben durch:



Bemerkung 11.4.

- (i) Wir werden die Young-Tableaus Y von $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ oft mit den Mengenpartitionen $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ mit $Y_1 \cup \dots \cup Y_k = \{1, \dots, n\}$ und $|Y_i| = \lambda_i$ für $i = 1, \dots, k$ identifizieren. Offenbar operiert dann S_n durch ${}^g Y := (g(Y_1), \dots, g(Y_k))$ transitiv auf der Menge der Young-Tableaus von λ . Sei φ_λ der entsprechende Permutationscharakter (siehe Aufgabe 29). Der Stabilisator von Y ist gegeben durch

$$S_Y := (S_n)_Y = \text{Sym}(Y_1) \times \dots \times \text{Sym}(Y_k) \cong S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}.$$

Dies ist die *Young-Untergruppe* von Y . Nach Aufgabe 29 ist $\varphi_\lambda = 1_{S_Y}^{S_n}$. Sei sgn der alternierende Charakter von S_n (siehe Beispiel 1.2). Wir setzen $\psi_\lambda := \text{sgn} \cdot \varphi_\lambda = (\text{sgn}_{S_Y} \cdot 1_{S_Y})^{S_n} = (\text{sgn}_{S_Y})^{S_n}$.

- (ii) Sei $Y' = (Y'_1, \dots, Y'_l)$ das zu Y gespiegelte Young-Tableau (als Mengenpartition). Dann ist $|Y_i \cap Y'_j| \leq 1$ für alle i, j (Schnitt von Zeile und Spalte). Dies zeigt $S_Y \cap S_{Y'} = 1$.

Beispiel 11.5.

- (i) Für $\lambda = (n)$ ist $S_Y = S_n$, $\varphi_\lambda = 1_{S_n}$ und $\psi_\lambda = \text{sgn}$.
- (ii) Für $\lambda = (1^n)$ ist $S_Y = 1$, und $\varphi_\lambda = 1_1^{S_n} = (\text{sgn}_1)^{S_n} = \psi_\lambda$ ist der reguläre Charakter von S_n .
- (iii) Für $\lambda = (n-1, 1)$ kann man die Menge der Young-Tableaus mit $\{1, \dots, n\}$ identifizieren. Also ist φ_λ der natürliche Permutationscharakter vom Grad n (Aufgabe 29).

Satz 11.6. Für jede Partition λ von n ist $(\varphi_\lambda, \psi_{\lambda'})_{S_n} = 1$. Insbesondere gibt es genau einen gemeinsamen irreduziblen Bestandteil χ_λ von φ_λ und $\psi_{\lambda'}$.

Beweis. Sei Y ein Young-Tableau von λ . Nach Frobenius und Mackey ist

$$\begin{aligned} (\varphi_\lambda, \psi_{\lambda'})_{S_n} &= (1_{S_Y}^{S_n}, (\text{sgn}_{S_{Y'}})^{S_n})_{S_n} = ((1_{S_Y}^{S_n})_{S_{Y'}}, \text{sgn}_{S_{Y'}})_{S_{Y'}} = \sum_{S_{Y'}gS_Y \in S_{Y'} \setminus S_n / S_Y} (1_{S_{Y'} \cap gS_Y g^{-1}}, \text{sgn}_{S_{Y'}})_{S_{Y'}} \\ &= \sum_{S_{Y'}gS_Y \in S_{Y'} \setminus S_n / S_Y} (1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} \end{aligned} \quad (11.1)$$

mit $D_g := S_{Y'} \cap gS_Y g^{-1} = S_{Y'} \cap S_{gY}$. Für $g = 1$ ist $D_g = 1$ und $(1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} = 1$ nach Bemerkung 11.4(ii). Wir müssen zeigen, dass alle anderen Summanden in (11.1) verschwinden. Sei also $(1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} > 0$ für ein $g \in S_n$. Wir schreiben ${}^gY = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k)$ und $Y' = (Y'_1, \dots, Y'_l)$. Nehmen wir an, dass Indizes i, j mit $|\bar{Y}_i \cap Y'_j| \geq 2$ existieren. Für $a, b \in \bar{Y}_i \cap Y'_j$ ist dann die Transposition $(a, b) \in D_g$. Dies liefert den Widerspruch $\text{sgn}_{D_g} \neq 1_{D_g}$ und $(1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} = 0$. Also ist $|\bar{Y}_i \cap Y'_j| \leq 1$ für alle i, j . Wir füllen nun ein Young-Diagramm \tilde{Y} vom Typ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ mit den Zahlen $1, \dots, n$ wie folgt:

Wegen $|\bar{Y}_1| = \lambda_1 = |\{j : \lambda'_j \geq 1\}| = l$ schneidet \bar{Y}_1 jede der Mengen Y'_j nichttrivial. Wir können daher für $j = 1, \dots, \lambda_1$ die Box $(1, j)$ von \tilde{Y} mit dem Element $a \in \bar{Y}_1 \cap Y'_j$ füllen. Nehmen wir nun induktiv an, dass schon die ersten i Zeilen von \tilde{Y} gefüllt sind. Sei $\lambda_{i+1} < j \leq l$. Dann ist $|Y'_j| = \lambda'_j = |\{r : \lambda_r \geq j\}| \leq i$. Wir haben also schon alle Elemente von Y'_j in den ersten i Zeilen von \tilde{Y} verbraucht. Somit ist $\bar{Y}_{i+1} \cap Y'_j = \emptyset$. Wegen $\bar{Y}_{i+1} \subseteq Y'_1 \cup \dots \cup Y'_{\lambda_{i+1}}$ und $|\bar{Y}_{i+1}| = \lambda_{i+1}$ ist also $|\bar{Y}_{i+1} \cap Y'_j| = 1$ für $j = 1, \dots, \lambda_{i+1}$. Daher lässt sich auch die Zeile $i + 1$ von \tilde{Y} wie zuvor füllen.

Am Ende haben \tilde{Y} und gY die gleichen Zeilenmengen, d. h. $\tilde{Y} = {}^gY$ als Mengenpartition. Außerdem haben \tilde{Y} und Y die gleichen Spaltenmengen. Es existiert also ein Element $\sigma \in S_{Y'}$, welches \tilde{Y} exakt auf Y abbildet, d. h. $\sigma {}^gY = \sigma \tilde{Y} = Y$. Dies zeigt $\sigma g \in S_Y$ und $S_{Y'}gS_Y = S_{Y'}\sigma gS_Y = S_{Y'}S_Y$. \square

Definition 11.7. Sei \leq die lexikografische Ordnung auf der Menge der Partitionen von n , d. h.

$$\lambda \leq \mu \iff \lambda = \mu \vee (\exists k : \lambda_k < \mu_k \wedge \lambda_i = \mu_i \ \forall i = 1, \dots, k-1).$$

Satz 11.8 (FROBENIUS-YOUNG). Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\text{Irr}(S_n) = \{\chi_\lambda : \lambda \text{ Partition von } n\}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die χ_λ paarweise verschieden sind. Sei also $\chi_\lambda = \chi_\mu$ für Partitionen $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ und $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ von n . Nach Definition ist $(\varphi_\lambda, \psi_{\mu'})_{S_n} \neq 0$. Seien Y und Z Young-Tableaus von λ bzw. μ . Wie im Beweis von Satz 11.6 existiert ein $g \in S_n$ mit $S_{Z'} \cap S_{gY} = 1$. Ersetzt man Y durch gY , so kann man $g = 1$ annehmen. Mit $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ und $Z' = (Z'_1, \dots, Z'_m)$ gilt also $|Y_i \cap Z'_j| \leq 1$. Wir wollen $\lambda \leq \mu$ zeigen. Es gilt $\lambda_1 = |Y_1| \leq m = \mu_1$. Nehmen wir nun an, dass $\lambda_j = \mu_j$ für $j \leq i$ gilt. Man kann dann die ersten i Zeilen von Y genau auf die ersten i Spalten von Z' verteilen. Wegen $Y_{i+1} \subseteq \{1, \dots, n\} = Z'_1 \cup \dots \cup Z'_m$ hat Z' also mindestens $|Y_{i+1}| = \lambda_{i+1}$ Zeilen mit mindestens $i + 1$ Boxen, d. h. $\mu_{i+1} = |\{j : |Z'_j| \geq i + 1\}| \geq \lambda_{i+1}$. Dies zeigt $\lambda \leq \mu$. Wegen $(\varphi_\mu, \psi_{\lambda'})_{S_n} \neq 0$ gilt analog auch $\mu \leq \lambda$ und wir sind fertig. \square

Lemma 11.9. Für eine Partition λ ist $\varphi_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} (\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \chi_\mu$.

Beweis. Sei $(\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \neq 0$ für eine Partition μ . Dann ist auch $(\varphi_\lambda, \psi_{\mu'})_{S_n} \neq 0$ und wie im Beweis von Satz 11.8 folgt $\lambda \leq \mu$. \square

Lemma 11.10. Seien λ und μ Partitionen von n . Für ein Element $g \in S_n$ vom Zyklentyp μ ist dann $\varphi_\lambda(g)$ die Anzahl der Möglichkeiten die Komponenten von μ auf die Komponenten von λ zu verteilen.

Beispiel 11.11. Sei $\lambda = (5, 4)$ und $\mu = (3, 2^2, 1^2)$. Dann ist $\varphi_\lambda(g) = 5$, veranschaulicht durch eingefärbte Young-Diagramme:



Beweis von Lemma 11.10. Sei $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ und $g = \sigma_1 \dots \sigma_k$ mit disjunkten Zyklen σ_i der Länge μ_i für $i = 1, \dots, k$. Nach Aufgabe 29 ist $\varphi_\lambda(g)$ die Anzahl der Young-Tableaus von λ , die durch g festbleiben. Ein Young-Tableau Y von λ bleibt genau dann unter g fest, wenn für $i = 1, \dots, k$ die nichttriviale Bahn von σ_i in einem Y_j liegt. Für Y gibt es daher genau so viele Möglichkeiten wie es Möglichkeiten gibt, die μ_i in das Young-Diagramm von λ zu verteilen. \square

Bemerkung 11.12. Lemma 11.9 und Lemma 11.10 erlauben es $\text{Irr}(S_n)$ rekursiv zu berechnen. Nach Beispiel 11.5 ist $\chi_{(n)} = \varphi_{(n)} = 1_{S_n}$. Nehmen wir an, dass χ_μ für $\mu > \lambda$ bekannt ist. Da χ_λ nur einmal in φ_λ auftritt, ist $\chi_\lambda = \varphi_\lambda - \sum_{\mu > \lambda} (\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \chi_\mu$. Nach Aufgabe 29 ist außerdem $(\varphi_\lambda, \chi_{(n)})_{S_n} = 1$. Insbesondere ist $\chi_{(n-1,1)} = \varphi_{(n-1,1)} - 1_{S_n}$.

Lemma 11.13. Für jede Partition λ von n gilt $\chi_{\lambda'} = \text{sgn} \cdot \chi_\lambda$.

Beweis. Nach Aufgabe 6 ist $\text{sgn} \cdot \chi_\lambda$ ein irreduzibler Bestandteil von $\text{sgn} \cdot \varphi_\lambda = \psi_\lambda = \psi_{\lambda'}$ und von $\text{sgn} \cdot \psi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}$. \square

Beispiel 11.14. Sei $n = 5$. Die Partitionen von 5 in absteigender Reihenfolge sind $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1^2), (2^2, 1), (2, 1^3), (1^5)$. Wegen Lemma 11.13 brauchen wir φ_λ nur für drei Partitionen berechnen:

g	(1^5)	$(2, 1^3)$	$(2^2, 1)$	$(3, 1^2)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	(5)
$ S_5 : C_{S_5}(g) $	1	10	15	20	20	30	24
$\varphi_{(4,1)}$	5	3	1	2	.	1	.
$\varphi_{(3,2)}$	10	4	2	1	1	.	.
$\varphi_{(3,1^2)}$	20	6	.	2	.	.	.

Die zweite Zeile enthält dabei die Längen der Konjugationsklassen und Nullen werden durch Punkte gekennzeichnet. Nun ist $\chi_{(5)} = 1_{S_5}$. Aus Bemerkung 11.12 ergibt sich $\chi_{(4,1)} = \varphi_{(4,1)} - 1_{S_5}$. Weiter ist $(\varphi_{(3,2)}, \chi_{(4,1)})_{S_5} = 1$ und $\chi_{(3,2)} = \varphi_{(3,2)} - 1_{S_5} - \chi_{(4,1)}$. Schließlich ist $(\varphi_{(3,1^2)}, \chi_{(3,2)})_{S_5} = 1$ und $(\varphi_{(3,1^2)}, \chi_{(4,1)})_{S_5} = 2$. Also ist $\chi_{(3,1^2)} = \varphi_{(3,1^2)} - 1_{S_5} - \chi_{(3,2)} - 2\chi_{(4,1)}$.

S_5	(1^5)	$(2, 1^3)$	$(2^2, 1)$	$(3, 1^2)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	(5)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
$(4, 1)$	4	2	.	1	-1	.	-1
$(3, 2)$	5	1	1	-1	1	-1	.
$(3, 1^2)$	6	.	-2	.	.	.	1
$(2^2, 1)$	5	-1	1	-1	-1	1	.
$(2, 1^3)$	4	-2	.	1	1	.	-1
(1^5)	1	-1	1	1	-1	-1	1

Bemerkung 11.15.

- (i) Sei λ eine Partition von n mit Young-Diagramm Y . Für eine Box $b := (i, j)$ von Y ist der *Haken* $H(b)$ von b die Vereinigung der Boxen $(i, j), (i, j+1), \dots$ und der Boxen $(i+1, j), (i+2, j), \dots$. Sei $h(b) := |H(b)| = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$. Wir können die $h(b)$ in das Young-Diagramm schreiben, zum Beispiel:

7	5	2	1
4	2		
3	1		
1			

Es gilt die *Hakenformel*:

$$\chi_\lambda(1) = \frac{n!}{\prod_{b \text{ Box von } Y} h(b)}$$

(ohne Beweis). Für obiges Tableau ergibt sich $\chi_\lambda(1) = 216$.

- (ii) Entfernt man den Haken $H(b)$ aus Y , so erhält man das Young-Diagramm einer Partition $\lambda \setminus H(b)$ von $n - h(b)$. Weiterhin nennt man $l(b) := \lambda'_j - i$ die *Beinlänge* von b . Sei nun $x \in S_n$ vom Typ $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ und $y \in S_{n-\mu_k}$ vom Typ $(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_l)$. Dann gilt die *Murnaghan-Nakayama-Formel*

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y, \\ h(b)=\mu_k}} (-1)^{l(b)} \chi_{\lambda \setminus H(b)}(y)$$

(ohne Beweis). Im Fall $\mu_k = n$ betrachtet man dabei $\chi_{\lambda \setminus H(b)}$ als trivialen Charakter auf der trivialen Gruppe $S_0 = \text{Sym}(\emptyset)$. Für $\mu_k = 1$ erhält man die *Verzweigungsregel*

$$(\chi_\lambda)_{S_{n-1}} = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y, \\ h(b)=1}} \chi_{\lambda \setminus H(b)}$$

(ohne Beweis).

- (iii) Im Folgenden werden wir $\text{Irr}(A_n)$ aus $\text{Irr}(S_n)$ konstruieren und dabei annehmen, dass $\text{Irr}(S_n)$ gegeben ist. O. B. d. A. sei stets $n \geq 3$.
- (iv) Sei $\sigma = (a_1, \dots, a_m) \in S_n$ ein Zyklus der Länge m . Dann ist $\sigma = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_{m-1}, a_m)$ und $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-1}$. Ist $g \in S_n$ ein beliebiges Element vom Zyklentyp $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, so ist also $\text{sgn}(g) = (-1)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_k - k} = (-1)^{n-k}$.

Satz 11.16. Sei $g \in K \in \text{Cl}(A_n)$ ein Element vom Zyklentyp $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Genau dann ist $K \notin \text{Cl}(S_n)$, wenn die λ_i ungerade und paarweise verschieden sind. Gegebenenfalls ist ${}^{(1,2)}K \in \text{Cl}(A_n)$ und $K \dot{\cup} {}^{(1,2)}K \in \text{Cl}(S_n)$.

Beweis. Es gilt $K \in \text{Cl}(S_n)$ genau dann, wenn $|A_n : C_{A_n}(g)| = |K| = |S_n : C_{S_n}(g)|$. Wegen $|A_n : C_{A_n}(g)| = |A_n : A_n \cap C_{S_n}(g)| = |A_n C_{S_n}(g) : C_{S_n}(g)|$ ergibt sich

$$K \notin \text{Cl}(S_n) \iff C_{S_n}(g) \subseteq A_n.$$

Sei $g = \sigma_1 \dots \sigma_k$ mit disjunkten Zyklen σ_i der Länge λ_i . Nehmen wir zunächst an, dass ein λ_i gerade ist. Dann ist $\sigma_i \in C_{S_n}(g) \setminus A_n$. Also können wir annehmen, dass alle λ_i ungerade sind. Setzen wir als Nächstes voraus, dass die λ_i nicht paarweise verschieden sind, also o. B. d. A. $\lambda_1 = \lambda_2$. Wir schreiben $\sigma_1 = (a_1, \dots, a_{\lambda_1})$ und $\sigma_2 = (b_1, \dots, b_{\lambda_1})$. Dann ist $\tau := (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1}) \notin A_n$. Außerdem ist $\tau \sigma_1 \tau = \sigma_2$, $\tau \sigma_2 \tau = \sigma_1$ und $\tau \sigma_i \tau = \sigma_i$ für alle $i \geq 3$. Dies zeigt $\tau \in C_{S_n}(g) \setminus A_n$.

Seien nun umgekehrt die λ_i ungerade und paarweise verschieden. Wir berechnen $|S_n : C_{S_n}(g)|$, indem wir die Möglichkeiten für g zählen (d. h. die Elemente vom Zyklentyp $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$). Für die λ_1 Elemente des Zyklus σ_1 gibt es $\frac{n!}{(n-\lambda_1)!}$ Möglichkeiten. Davon liefern allerdings je λ_1 Möglichkeiten das gleiche Element. Also gibt es $\frac{n!}{\lambda_1(n-\lambda_1)!}$ Möglichkeiten für σ_1 . Analog gibt es danach noch $\frac{(n-\lambda_1)!}{\lambda_2(n-\lambda_1-\lambda_2)!}$ Möglichkeiten für σ_2 usw. Dies zeigt

$$|S_n : C_{S_n}(g)| = \frac{n!(n-\lambda_1)!(n-\lambda_1-\lambda_2)! \dots (n-\lambda_1-\dots-\lambda_{k-1})!}{\lambda_1 \dots \lambda_k (n-\lambda_1)!(n-\lambda_1-\lambda_2)! \dots \underbrace{(n-\lambda_1-\dots-\lambda_k)!}_{=0}} = \frac{n!}{\lambda_1 \dots \lambda_k}$$

und $|C_{S_n}(g)| = \lambda_1 \dots \lambda_k$. Offenbar ist $\langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_k \rangle \subseteq C_{S_n}(g)$ und $|\langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_k \rangle| = |\langle \sigma_1 \rangle| \dots |\langle \sigma_k \rangle| = \lambda_1 \dots \lambda_k$. Also ist $C_{S_n}(g) = \langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_k \rangle \subseteq A_n$. Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Sei nun $K \notin \text{Cl}(S_n)$. Wie üblich ist ${}^{(1,2)}K \in \text{Cl}(A_n)$. Sei $K \subseteq \tilde{K} \in \text{Cl}(S_n)$. Dann ist sicher $K \cup {}^{(1,2)}K \subseteq \tilde{K}$. Für jedes $h \in \tilde{K}$ existiert umgekehrt ein $x \in S_n$ mit $h = xgx^{-1}$. Ist $x \in A_n$, so ist $h \in K$. Anderenfalls ist $(1, 2)x \in A_n$ und $h = (1, 2)((1, 2)gx^{-1}(1, 2))(1, 2) \in {}^{(1,2)}K$. Dies zeigt $\tilde{K} = K \dot{\cup} {}^{(1,2)}K$. \square

Beispiel 11.17. Für $n \geq 3$ gibt es stets ein $K \in \text{Cl}(A_n)$ mit $K \notin \text{Cl}(S_n)$. Für ungerades n kann man nämlich Zyklentyp (n) in Satz 11.16 wählen und für gerades n Zyklentyp $(n-1, 1)$.

Satz 11.18. Sei $\chi := \chi_\lambda \in \text{Irr}(S_n)$ für eine Partition λ von n . Im Fall $\lambda \neq \lambda'$ ist $\chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)$ und im Fall $\lambda = \lambda'$ ist $\chi_{A_n} = \xi_\lambda + {}^{(1,2)}\xi_\lambda$ mit $\xi_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$ und $\xi_\lambda \neq {}^{(1,2)}\xi_\lambda$. Auf diese Weise tritt jeder irreduzible Charakter von A_n auf.

Beweis. Es gilt

$$(\chi, \chi)_{S_n} + (\chi, \text{sgn} \cdot \chi)_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi(g)^2 + \text{sgn}(g) \chi(g)^2 = \frac{2}{n!} \sum_{g \in A_n} \chi(g)^2 = (\chi_{A_n}, \chi_{A_n})_{A_n}.$$

Im Fall $\lambda \neq \lambda'$ ist $\text{sgn} \cdot \chi = \chi_{\lambda'} \neq \chi$ und $(\chi_{A_n}, \chi_{A_n})_{A_n} = 1$, d. h. $\chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)$.

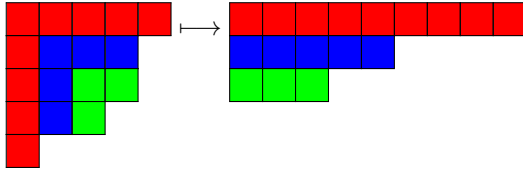
Sei nun $\lambda = \lambda'$. Dann ergibt sich $(\chi_{A_n}, \chi_{A_n})_{A_n} = 2$ und χ_{A_n} ist die Summe zweier verschiedener irreduzibler Charaktere von A_n . Aus Satz 4.11 folgt also $\chi_{A_n} = \xi_\lambda + {}^{(1,2)}\xi_\lambda$ für ein $\xi_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$.

Sei schließlich $\xi \in \text{Irr}(A_n)$ beliebig. Dann ist $(\chi_{A_n}, \xi)_{A_n} = (\chi, \xi^{S_n})_{S_n} \neq 0$ für ein $\chi \in \text{Irr}(S_n)$. Also entsteht ξ auf obige Weise. \square

Bemerkung 11.19. Wie üblich operiert $\langle (1, 2) \rangle$ auf $\text{Irr}(A_n)$ und auf $\text{Cl}(A_n)$. Nach Brauers Permutationslemma gibt es genau so viele Paare ${}^{(1,2)}\xi_\lambda \neq \xi_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$ wie es Paare ${}^{(1,2)}K \neq K \in \text{Cl}(A_n)$ gibt. Dies sieht man auch durch folgende Bijektion:

$$\Phi : \{\text{Partitionen } \lambda = \lambda'\} \longrightarrow \{\text{Partitionen } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \text{ mit } \lambda_i \text{ ungerade und paarweise verschiedenen}\},$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \longmapsto (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 3, 2\lambda_3 - 5, \dots)$$



Satz 11.20. Sei $\lambda = \lambda'$ eine Partition von n . Dann existiert genau eine Partition $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ von n mit $\chi_\lambda(g) \equiv 1 \pmod{2}$ für ein $g \in S_n$ vom Zyklentyp μ . Es gilt

$$\xi_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \chi_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \mu, \\ \frac{1}{2} \chi_\lambda(h) + \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-k}{2}} \mu_1 \dots \mu_k} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } g \text{ konjugiert,} \\ \frac{1}{2} \chi_\lambda(h) - \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-k}{2}} \mu_1 \dots \mu_k} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}g \text{ konjugiert} \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von ξ_λ . Die Abbildung $\Gamma : \lambda \rightarrow \mu$ ist eine Bijektion zwischen den Partitionen $\lambda = \lambda'$ und den Partitionen μ mit paarweise verschiedenen ungeraden Teilen.

Beweis. Wir induzieren erst nach n und dann nach λ (in lexikografischer Reihenfolge). Der Fall $n = 3$ ist bekannt. Sei $n \geq 4$.

Schritt 1: $\lambda < (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$.

Sei $\Phi(\lambda) = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$. Dann ist $\eta_1 < n$ und nach Induktion kennt man die Charaktere $\xi_1 := \xi_{\Gamma^{-1}(\eta_1)} \in \text{Irr}(A_{\eta_1})$ und $\xi_2 := \xi_{\Gamma^{-1}(\eta_2, \dots, \eta_l)} \in \text{Irr}(A_{n-\eta_1})$. Somit ist $\xi_1 \xi_2 \in \text{Irr}(A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1})$. Mittels $A_{n-\eta_1} \cong \text{Alt}(\{\eta_1 + 1, \eta_1 + 2, \dots, n\})$ können wir $A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$ als Untergruppe von A_n auffassen. Wir setzen

$$\theta := (\xi_1 \xi_2)^{A_n} - ({}^{(1,2)}\xi_1 \xi_2)^{A_n}.$$

Sei $\theta(h) \neq 0$ für ein $h \in A_n$. Dann existiert ein $x \in A_n$ mit $xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$. Sei also o. B. d. A. $h = h_1 h_2$ mit $h_1 \in A_{\eta_1}$ und $h_2 \in A_{n-\eta_1}$. Für $x \in A_n$ mit $xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$ schreiben wir $xhx^{-1} = (xhx^{-1})_1 (xhx^{-1})_2$ mit $(xhx^{-1})_1 \in A_{\eta_1}$ und $(xhx^{-1})_2 \in A_{n-\eta_1}$. Enthält h keinen Zyklus der Länge η_1 , so wäre nach Induktionsvoraussetzung $\xi_1((xhx^{-1})_1) = {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1)$ und $\theta(h) = 0$. Folglich gibt es einen Zyklus σ der Länge η_1 in h . Durch Konjugation dürfen wir $\sigma = h_1$ annehmen. Nehmen wir als Nächstes an, dass h_2 nicht Zyklentyp (η_2, \dots, η_l) hat. Dann ist $\eta_2 \neq 1$ und $n - \eta_1 \geq 2$. Sei $\zeta := (\eta_1 + 1, \eta_1 + 2)$. Mit $x \in A_n$ ist dann auch

$(1, 2)\zeta x \in A_n$ und $(xhx^{-1})_1 = (\zeta xhx^{-1}\zeta)_1$. Induktion impliziert

$$\begin{aligned}
\theta(h) &= \frac{1}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \sum_{\substack{x \in A_n, \\ xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}}} (\xi_1((xhx^{-1})_1) - {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1))\xi_2((xhx^{-1})_2) \\
&= \frac{\xi_2(h_2)}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \sum_{\substack{x \in A_n, \\ xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}, \\ (xhx^{-1})_1 \text{ ist } \eta_1\text{-Zyklus}}} \xi_1((xhx^{-1})_1) - \xi_1(((1, 2)xhx^{-1}(1, 2))_1) \\
&= \frac{\xi_2(h_2)}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \sum_{\substack{x \in A_n, \\ xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}, \\ (xhx^{-1})_1 \text{ ist } \eta_1\text{-Zyklus}}} \xi_1(((1, 2)\zeta xhx^{-1}\zeta(1, 2))_1) - \xi_1((\zeta xhx^{-1}\zeta)_1) \\
&= \frac{\xi_2(h_2)}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \sum_{\substack{x \in A_n, \\ xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}, \\ (xhx^{-1})_1 \text{ ist } \eta_1\text{-Zyklus}}} \xi_1(((1, 2)xhx^{-1}(1, 2))_1) - \xi_1((xhx^{-1})_1) = 0.
\end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt schliefllich, dass h Zyklentyp η hat. Im Fall $\eta_2 = 1$ ist

$$\begin{aligned}
\theta(h) &= \frac{1}{|A_{\eta_1}|} \sum_{\substack{x \in A_n, \\ xhx^{-1} \in A_{\eta_1}}} \xi_1(xhx^{-1}) - {}^{(1,2)}\xi_1(xhx^{-1}) \\
&= \pm \frac{|A_{\eta_1} : C_{A_{\eta_1}}(h_1)||C_{A_n}(h_1)|}{|A_{\eta_1}|} \sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2}} \eta_1} = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1}
\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Das Vorzeichen hängt hierbei von der Wahl des Charakters ξ_1 ab und wird im Folgenden unerheblich sein. Sei nun $\eta_2 > 1$. Sei $\chi_2 := \chi_{\Gamma^{-1}(\eta_2, \dots, \eta_l)} \in \text{Irr}(S_{n-\eta_1})$. Da die η_i paarweise verschieden sind, folgt $x \in S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1}$ aus $xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$. Man iberlegt sich leicht, dass man durch xhx^{-1} genau $2|A_{\eta_1} : C_{A_{\eta_1}}(h_1)||A_{n-\eta_1} : C_{A_{n-\eta_1}}(h_2)||C_{A_n}(h)|$ Konjugierte von h erreicht. Außerdem treten die Summanden in $\theta(h)$ in Paaren der Form

$$\pm \sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2}} \eta_1} \left(\frac{1}{2} \chi_2(h) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-\eta_1-l+1}{2}} \eta_2 \dots \eta_l} \right)$$

auf. Also ist auch hier

$$\theta(h) = \pm \frac{2|A_{\eta_1} : C_{A_{\eta_1}}(h_1)||A_{n-\eta_1} : C_{A_{n-\eta_1}}(h_2)||C_{A_n}(h)|}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \frac{\sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2} + \frac{n-\eta_1-l+1}{2}} \eta_1 \dots \eta_l}}{2} = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l}.$$

Es folgt

$$(\theta, \theta)_{A_n} = \frac{2|A_n : C_{A_n}(h)|}{|A_n|} \eta_1 \dots \eta_l = 2.$$

Da $(1, 2)$ die Ziffern $\eta_1 + 1, \dots, n$ fest lässt, ist

$$\theta = (\xi_1 \xi_2)^{A_n} - ({}^{(1,2)}\xi_1 \xi_2)^{A_n} = (\xi_1 \xi_2)^{A_n} - ({}^{(1,2)}(\xi_1 \xi_2))^{A_n} = (\xi_1 \xi_2)^{A_n} - ({}^{(1,2)}((\xi_1 \xi_2)^{A_n})).$$

Wir schreiben $(\xi_1 \xi_2)^{A_n} = \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} a_\xi \xi$. Dann ist $\theta = \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} (a_\xi - a_{(1,2)\xi}) \xi$. Es gibt also genau ein $\tilde{\xi}_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$ mit $a_{\tilde{\xi}_\lambda} \neq 0$ und ${}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda \neq \tilde{\xi}_\lambda$. Es ist dann $\theta = \tilde{\xi}_\lambda - ({}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda)$. Sei $\tilde{\chi}_\lambda := \tilde{\xi}_\lambda^{S_n} \in \text{Irr}(S_n)$ (siehe Satz 4.13). Sei $\tilde{h} \in A_n$ vom Zyklentyp η . Anhand der oben berechneten Werte für θ folgt

$$\tilde{\xi}_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \eta, \\ \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } \tilde{h} \text{ konjugiert,} \\ \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) - \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } ({}^{(1,2)}\tilde{h}) \text{ konjugiert} \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von $\tilde{\xi}_\lambda$. Nach Definition verschwindet $\tilde{\chi}_\lambda$ auf $S_n \setminus A_n$. Ist $\tilde{\chi}_\lambda(h) \equiv 1 \pmod{2}$, so ist $h \in A_n$, und $\frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)$ ist keine ganz-algebraische Zahl. Also muss dann h Zyklentyp η haben. Nehmen wir indirekt $\tilde{\chi}_\lambda(\tilde{h}) \equiv 0 \pmod{2}$ an. Mit $\tilde{\xi}_\lambda(\tilde{h})$ ist dann auch $\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l}$ ganz-algebraisch. Somit wäre auch

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

ganz-algebraisch. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\tilde{\chi}_\lambda$ für genau eine Konjugationsklasse von S_n ungerade Werte annimmt. Für verschiedene $\lambda < (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$ erhält man offenbar auch verschiedene $\tilde{\chi}_\lambda$. Somit gilt die Behauptung des Satzes für alle Charaktere von S_n bis auf (möglicherweise) einen.

Schritt 2: $\lambda = (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$.

Dann ist n ungerade. Wir bezeichnen den „fehlenden“ Charakter mit $\tilde{\chi}_\lambda \in \text{Irr}(S_n)$. Wie üblich zerfällt $(\tilde{\chi}_\lambda)_{A_n} = \tilde{\xi}_\lambda + {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda$ mit $\tilde{\xi}_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$. Sei $h \in K \in \text{Cl}(A_n)$ vom Zyklentyp $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$. Ist $K \in \text{Cl}(S_n)$, so ist $\tilde{\xi}_\lambda(h) = \tilde{\xi}_\lambda({}^{(1,2)}h) = {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda(h) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)$. Wir können nach Satz 11.16 also annehmen, dass die η_i paarweise verschieden und ungerade sind. Sei zunächst $\Phi(\lambda) \neq \eta$. Sei $\tau := \Phi^{-1}(\eta) \neq \lambda$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_\tau(h)\overline{\tilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)} + {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\tau(h)\overline{{}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)} &= \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\tau(h)^2 - \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l, \\ \tilde{\xi}_\tau(h)\overline{\tilde{\xi}_\tau(h)} + {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\tau(h)\overline{{}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\tau(h)} &= \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\tau(h)^2 + \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l \end{aligned}$$

nach Schritt 1. Sei $a := \tilde{\xi}_\lambda(h) = {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda({}^{(1,2)}h)$ und $b := {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda(h) = \tilde{\xi}_\lambda({}^{(1,2)}h)$. Dann ist $a + b = \tilde{\chi}_\lambda(h)$. Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi({}^{(1,2)}h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + 2 \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{4} - \frac{\eta_1 \dots \eta_l}{2} + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}|C_{S_n}(h)| - \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 = a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |C_{A_n}(h)| &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi(h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + 2 \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{4} + \frac{\eta_1 \dots \eta_l}{2} + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}|C_{S_n}(h)| + \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 = |C_{A_n}(h)| + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2. \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt $a\bar{b} + b\bar{a} = a\bar{a} + b\bar{b}$ und $(a-b)(\bar{b}-\bar{a}) = 0$. Dies zeigt $a = b = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)$.

Sei nun $\eta = \Phi(\lambda)$. Dann ist $\tilde{\xi}_\tau(h) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\tau(h)$ für alle $\tau \neq \lambda$ nach Schritt 1. Die zweite Orthogonalitätsrelation liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi({}^{(1,2)}h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + 2 \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{4} + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |C_{A_n}(h)| &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi(h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + 2 \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{4} + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2. \end{aligned}$$

Also ist $\eta_1 \dots \eta_l = a(\bar{a} - \bar{b}) + b(\bar{b} - \bar{a}) = (a - b)(\bar{a} - \bar{b})$. Schreibe $h = (a_1^1, \dots, a_{\eta_1}^1)(a_1^2, \dots, a_{\eta_2}^2) \dots (a_1^l, \dots, a_{\eta_l}^l)$ und

$$x = \prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^{\frac{\eta_i-1}{2}} (a_{j+1}^i, a_{\eta_i-j+1}^i).$$

Dann ist $xhx^{-1} = h^{-1}$. Im Fall $n - l \equiv 0 \pmod{4}$ ist $\text{sgn}(x) = (-1)^{\frac{\eta_1-1}{2} + \dots + \frac{\eta_l-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-l}{2}} = 1$. Dann sind also h und h^{-1} in A_n konjugiert und $a, b \in \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 6.15). Es ergibt sich $a - b = \sqrt{\eta_1 \dots \eta_l}$ und $a = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{\eta_1 \dots \eta_l}$. Sei schließlich $n - l \equiv 2 \pmod{4}$. Hier ist $\text{sgn}(x) = -1$. Gäbe es ein $y \in A_n$ mit $yhy^{-1} = h^{-1}$, so wäre $x \in xC_{S_n}(h) = yC_{S_n}(h) \subseteq A_n$ (siehe Beweis von Satz 11.16). Also sind h und h^{-1} nicht in A_n konjugiert und $b = \bar{a}$. Somit ist $a - \bar{a} = \sqrt{-\eta_1 \dots \eta_l}$ und $a = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{-\eta_1 \dots \eta_l}$ bei geeigneter Wahl von $\tilde{\xi}_\lambda$. Für ein festes $\tilde{h} \in A_n$ vom Zyklentyp η gilt also

$$\tilde{\xi}_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \eta, \\ \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } \tilde{h} \text{ konjugiert,} \\ \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } (1,2)\tilde{h} \text{ konjugiert.} \end{cases}$$

Zusammen mit Schritt 1 folgt auch, dass Γ eine Bijektion ist. \square

Beispiel 11.21. Für $n = 5$ erhält man aus Beispiel 11.14 die Charakertafel von A_5 (vgl. Aufgabe 8):

A_5	(1^5)	$(2^2, 1)$	$(3, 1^2)$	$(5)_1$	$(5)_2$
(5)	1	1	1	1	1
$(4, 1)$	4	.	1	-1	-1
$(3, 2)$	5	1	-1	.	.
$(3, 1^2)_1$	3	-1	.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$(3, 1^2)_2$	3	-1	.	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bemerkung 11.22. Sei $\lambda = \lambda'$ mit Young-Diagramm Y und $\Phi(\lambda) = \mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$. Sei $x \in S_n$ vom Zyklentyp μ und sei $y \in S_{n-\mu_1}$ vom Zyklentyp (μ_2, \dots, μ_k) . Wir zeigen $\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{n-k}{2}}$ durch Induktion nach k . Nach der Murnaghan-Nakayama-Formel gilt

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y, \\ h(b)=\mu_1}} (-1)^{l(b)} \chi_{\lambda \setminus H(b)}(y) = (-1)^{l(1,1)} \chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}} \chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y).$$

Im Fall $k = 1$ ist $\chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y) = 1 = \mu_1$ und $\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Sei nun $k \geq 2$ und die Aussage für $k - 1$ bereits bewiesen. Dann gilt

$$\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}} \chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2} + \frac{n-\mu_1-k+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-k}{2}}.$$

Insbesondere ist $\chi_\lambda(x)$ ungerade und in Satz 11.20 gilt $\Gamma = \Phi$. Die im Beweis konstruierten Charaktere $\tilde{\chi}_\lambda$ stimmen also mit χ_λ überein. Außerdem kennt man somit die einzigen nicht-ganzzahligen Werte in der Charakertafel von A_n explizit.

Charaktertheorie Blatt 1

Aufgabe 1 (2 Punkte). Bestimmen Sie die irreduziblen Darstellungen einer endlichen zyklischen Gruppe.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe und V ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Basis $\{v_g : g \in G\}$. Für $g \in G$ sei $\Delta(g)$ die lineare Abbildung auf V , die v_h auf v_{gh} abbildet für $h \in G$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine treue Darstellung von G ist.
 - (ii) Berechnen Sie den Charakter von Δ .
 - (iii) Zeigen Sie, dass Δ für $G \neq 1$ nicht irreduzibel ist.
- (Man nennt Δ die *reguläre* Darstellung von G .)

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2+2 Punkte). Sei $n \geq 3$ und

$$\sigma := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\zeta := e^{2\pi i/n}$. Man nennt $D_{2n} := \langle \sigma, \tau \rangle$ *Diedergruppe*.

- (i) Zeigen Sie: $|D_{2n}| = 2n$.
- (ii) Zeigen Sie, dass ein irreduzibler Charakter χ von D_{2n} mit $\chi(\sigma) = 1$ und $\chi(\tau) = -1$ existiert.
- (iii) Zeigen Sie, dass für gerades n irreduzible Charaktere χ und ψ von D_{2n} mit $\chi(\sigma) = \psi(\sigma) = -1$ und $\chi(\tau) = -\psi(\tau) = 1$ existieren.
- (iv) Zeigen Sie, dass D_{2n} eine Darstellung Δ_r mit $\Delta_r(\sigma) = \sigma^r$ und $\Delta_r(\tau) = \tau$ für $r \in \mathbb{Z}$ besitzt.
- (v) Zeigen Sie, dass Δ_r für $r = 1, \dots, (n-1)/2$ (bzw. $r = 1, \dots, (n-2)/2$) irreduzibel ist, falls n ungerade (bzw. gerade) ist.
- (vi) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem für die Ähnlichkeitsklassen irreduzibler Darstellungen von D_{2n} .

Charaktertheorie

Blatt 2

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei Δ eine Matrixdarstellung einer endlichen Gruppe G , und sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass $\Delta(g)$ diagonalisierbar ist.

Hinweis: Man kann die Jordansche Normalform oder Satz 1.10 der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte). Sei Δ eine Matrixdarstellung von G mit Charakter χ .

(i) Zeigen Sie, dass auch $\overline{\Delta}$ mit $\overline{\Delta}(g) := \overline{\Delta(g)}$ für $g \in G$ eine Matrixdarstellung von G ist. Dabei ist $\overline{\Delta(g)}$ das komplex Konjugierte von $\Delta(g)$.

(ii) Δ ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{\Delta}$ irreduzibel ist.

(iii) $\overline{\Delta}$ hat Charakter $\overline{\chi}$ mit $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ für $g \in G$.

Hinweis: Man kann Aufgabe 4 verwenden.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Seien $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$ mit $\chi(1) = 1$. Zeigen Sie: $\chi\psi \in \text{Irr}(G)$.

Aufgabe 7 (2+2+2+2 Punkte). Seien G, H endliche, abelsche Gruppen. Zeigen Sie:

(i) $\widehat{G} := \text{Irr}(G)$ ist eine abelsche Gruppe bzgl. Multiplikation. (Man nennt \widehat{G} Charaktergruppe von G .)

(ii) $\widehat{\widehat{G}} \cong G$ (*Hinweis:* Denken Sie an den Bidualraum. Verwenden Sie nicht (iv).)

(iii) $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$.

(iv) $\widehat{\widehat{G}} \cong G$.

Aufgabe 8 (2 Punkte). Bestimmen Sie die Charaktertafel von A_5 .

Charaktertheorie

Blatt 3

Aufgabe 9 (2+2+2 Punkte). Zeigen Sie:

- (i) Für Charaktere χ, ψ von G gilt: $\text{Ker}(\chi + \psi) = \text{Ker}(\chi) \cap \text{Ker}(\psi)$.
- (ii) Jeder Normalteiler von G ist der Kern eines Charakters.
- (iii) $\bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} \text{Ker}(\chi) = 1$.

Aufgabe 10 (2 Punkte). Finden Sie ein normiertes, ganzzahliges Polynom mit Nullstelle $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Aufgabe 11 (2 Punkte). Sei $N \trianglelefteq G$ und $\chi \in \text{Irr}(G)$. Zeigen Sie, dass $(\chi_N)^G = \chi\rho$ gilt, wobei ρ die Inflation des regulären Charakters von G/N ist.

Aufgabe 12 (3 Punkte). Sei A eine abelsche Untergruppe von G , und sei $\chi \in \text{Irr}(G)$. Zeigen Sie: $\chi(1) \leq |G : A|$.

Aufgabe 13 (3 Punkte). Berechnen Sie die Eigenwerte einer Permutationsmatrix. (Eine Permutationsmatrix enthält in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur Nullen.)

Charaktertheorie Blatt 4

Aufgabe 14 (3 Punkte). Sei $H \leq G$ und Δ eine Darstellung von H mit Charakter χ . Sei t_1, \dots, t_m ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen von H nach G . Für $g \in G$ sei $\dot{\Delta}(g) := \Delta(g)$, falls $g \in H$ und $0 \in \mathbb{Z}^{\chi(1) \times \chi(1)}$ sonst. Für $g \in G$ definieren wir die Blockmatrix

$$\Delta^G(g) := \begin{pmatrix} \dot{\Delta}(t_1^{-1}gt_1) & \cdots & \dot{\Delta}(t_1^{-1}gt_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\Delta}(t_m^{-1}gt_1) & \cdots & \dot{\Delta}(t_m^{-1}gt_m) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Δ^G eine Darstellung von G mit Charakter χ^G ist.

Aufgabe 15 (3 Punkte). Sei K ein endlicher Körper mit $|K| > 2$. Für $a \in K^\times$ und $b \in K$ sei $f_{a,b} : K \rightarrow K$, $x \mapsto ax + b$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Aff}(1, K) := \{f_{a,b} : a \in K^\times, b \in K\} \leq \text{Sym}(K)$$

eine Frobeniusgruppe ist.

Aufgabe 16 (2 Punkte). Sei G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement H . Zeigen Sie: $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$ (d. h. H ist eine *Hallgruppe* von G).

Aufgabe 17 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass Untergruppen und Faktorgruppen von p -elementaren (bzw. p -quasielementaren) Gruppen wieder p -elementar (bzw. p -quasielementar) sind.

Aufgabe 18 (2 Punkte). Sei P eine endliche p -Gruppe. Zeigen Sie, dass P genau dann einen treuen, irreduziblen Charakter besitzt, wenn $Z(P)$ zyklisch ist.

Charaktertheorie

Blatt 5

Aufgabe 19 (3 Punkte). Sei $G = \langle g \rangle \cong C_3$ und $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ mit $\Delta(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass Δ eine irreduzible \mathbb{Q} -Darstellung ist. Zeigen Sie auch, dass Δ aufgefasst als $(\mathbb{C}$ -)Darstellung reduzibel ist.

Aufgabe 20 (2+2+2 Punkte). Sei $G := \mathrm{SL}(2, 3)$. Zeigen Sie:

- (i) $|G| = 24$.
- (ii) $G/Z(G) \cong A_4$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Operation von G auf der Menge der eindimensionalen Untervektorräumen von \mathbb{F}_3^2 .
- (iii) G ist keine M-Gruppe. (Nicht jede auflösbare Gruppe ist also eine M-Gruppe.)

Aufgabe 21 (3 Punkte). Sei G eine Gruppe ungerader Ordnung. Zeigen Sie: $k(G) \equiv |G| \pmod{16}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\bar{\chi} = \chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Aufgabe 22 (3 Punkte). Konstruieren Sie irreduzible Charaktere mit Frobenius-Schur-Indikator 0, 1 und -1 .

Charaktertheorie

Blatt 6

Aufgabe 23 (10 Punkte). Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppeneigenschaften man an Hand der Charaktertafel von G ablesen kann:

- (i) $|G|$,
- (ii) Kommutativität,
- (iii) die Längen der Konjugationsklassen,
- (iv) Einfachheit,
- (v) Normalteiler und deren Ordnung,
- (vi) Isomorphietyp von G/G' ,
- (vii) Isomorphietyp von $Z(G)$,
- (viii) Auflösbarkeit,
- (ix) Isomorphietyp (von G),
- (x) Auflösbarkeitsstufe, d. h. $\min\{n \in \mathbb{N} : G^{(n)} = 1\}$. *Hinweis:* Verwenden Sie Google.¹

Zusatz: Nilpotenz, Nilpotenzklasse, $F(G)$ (Fittinggruppe), $\Phi(G)$ (Frattinigruppe), ... (soweit Begriffe bekannt).

Aufgabe 24 (5 Punkte). Gegeben sei die Charaktertafel von G :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	1	$\bar{\beta}$	$-\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	β	$-\beta$	β	β	1	-1	1	1
1	-1	1	1	β	$-\beta$	β	β	$\bar{\beta}$	$-\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	1	-1	1	1
1	1	1	1	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	β	β	β	β	1	1	1	1
1	1	1	1	β	β	β	β	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	1	1	1	1
2	.	α	α'	2	.	α	α'	2	.	α	α'	2	.	α	α'
2	.	α'	α	2	.	α'	α	2	.	α'	α	2	.	α'	α
2	.	α	α'	$2\bar{\beta}$.	γ'	γ	2β	.	$\bar{\gamma}'$	$\bar{\gamma}$	2	.	α	α'
2	.	α	α'	2β	.	$\bar{\gamma}'$	$\bar{\gamma}$	$2\bar{\beta}$.	γ'	γ	2	.	α	α'
2	.	α'	α	$2\bar{\beta}$.	γ	γ'	2β	.	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}'$	2	.	α'	α
2	.	α'	α	2β	.	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}'$	$2\bar{\beta}$.	γ	γ'	2	.	α'	α
3	-3	3	3	-1	1	-1	-1
3	3	3	3	-1	-1	-1	-1
6	.	3α	$3\alpha'$	-2	.	$-\alpha$	$-\alpha'$
6	.	$3\alpha'$	3α	-2	.	$-\alpha'$	$-\alpha$

¹Für das Schreiben von Abschlussarbeiten muss auch Recherchieren geübt werden :-)

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \alpha &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, & \alpha' &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ \beta &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, & \gamma &= e^{2\pi i/15} + e^{8\pi i/15}, & \gamma' &= e^{14\pi i/15} + e^{-4\pi i/15}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie so viele Eigenschaften von G wie möglich.

Aufgabe 25 (2 Punkte). Zeigen Sie, dass eine einfache Gruppe keinen irreduziblen Charakter vom Grad 2 besitzt.

Aufgabe 26 (2 Punkte). Sei G eine einfache Gruppe mit einer Involution x , sodass $C_G(x)$ zyklisch ist. Bestimmen Sie G .

Charaktertheorie Blatt 7

Aufgabe 27 (2+2 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- (i) Zwei Elemente in S_n sind genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben.
- (ii) Die Charaktertafel von S_n ist ganzzahlig. *Hinweis:* Verwenden Sie Galoistheorie.

Aufgabe 28 (2 Punkte). Sei $G = G' \leq \text{GL}(2, \mathbb{C})$ und $A \neq 1$ ein abelscher Normalteiler von G . Zeigen Sie $A = Z(G) \cong C_2$.

Aufgabe 29 (2+2+2+2+2+2+2 Punkte). Sei $f : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ eine Gruppenoperation auf einer endlichen, nichtleeren Menge Ω . Zeigen Sie:

- (i) Es gilt $\text{Sym}(\Omega) \cong S_{|\Omega|}$. Im Folgenden können wir also $\Omega = \{1, \dots, n\}$ annehmen.
- (ii) Die Abbildung $F : \text{Sym}(\Omega) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\pi \mapsto (\delta_{i\pi(j)})_{i,j=1}^n$ ist ein Monomorphismus. Insbesondere ist $\Delta := F \circ f : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung von G . (Man nennt Δ *Permutationsdarstellung*.)
- (iii) Für den Charakter χ von Δ gilt $\chi(g) := |\{\omega \in \Omega : {}^g\omega = \omega\}|$ für $g \in G$. (Man nennt χ *Permutationscharakter*.)
- (iv) Sei $\omega_1, \dots, \omega_m$ ein Repräsentantensystem für die Bahnen von f . Dann ist

$$\chi = \sum_{i=1}^m 1_{G_{\omega_i}}^G,$$

wobei $G_\omega := \{g \in G : {}^g\omega = \omega\}$ der *Stabilisator* von $\omega \in \Omega$ in G ist.

- (v) Es gilt $m = (1_G, \chi)_G$. Insbesondere ist $\chi - 1_G$ ein Charakter von G , falls $|\Omega| > 1$.
- (vi) Sind H_1, \dots, H_k beliebige Untergruppen von G , so ist auch

$$\sum_{i=1}^k 1_{H_i}^G$$

ein Permutationscharakter von G .

- (vii) Die Menge der Permutationscharaktere von G ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.

Aufgabe 30 (2 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Untergruppe besitzt, die zu S_{n+1} isomorph ist.

Hinweis: Man kann Aufgabe 29 verwenden.

Stichwortverzeichnis

Symbole

$\|A\|$, 40
 $(\chi, \psi)_G$, 7
 1_G , 4
 ${}^\alpha\Delta$, 27
 ${}^\alpha\chi$, 27
 $\text{CF}(G)$, 6
 $C_G(g)$, 6
 $\text{Cl}(G)$, 6
 C_n , 11
 $\Delta \oplus \Gamma$, 4
 Δ_H , 4
 $\Delta \otimes \Gamma$, 10
 G' , 11
 $G^{(i)}$, 28
 ${}^g\omega$, 20
 ${}^g\varphi$, 17
 $H \backslash G / K$, 23
 $\text{Irr}(G)$, 6
 $\text{Irr}(G|\varphi)$, 17
 $k(G)$, 9
 $\text{Ker}(\chi)$, 12
 λ' , 46
 $N_G(H)$, 17
 $\nu_n(\chi)$, 29
 $\omega_\chi(C)$, 8
 φ^G , 16
 φ_H , 16
 \mathbb{Q}_n , 42
 sgn , 4
 $\theta_n(g)$, 29
 $U(n, \mathbb{C})$, 40
 x_p , 33
 x_π , 33
 $Z(\chi)$, 12
 $\det \Delta$, 6

A

Artin, 25

B

Bestandteil
 irreduzibler, 9
 Vielfachheit, 9
Blichfeldt, 43
Brauer, 26, 38
Brauer-Burnside, 44
Brauer-Dade, 33
Brauer-Fowler, 30
Brauer-Suzuki, 35
Brauers Induktionssatz, 25
Brauers Permutationslemma, 20

Burnside, 14, 38
Burnsides Verlagerungssatz, 36

C

Charakter, 6
 algebraisch konjugiert, 27
 Grad, 6
 irreduzibler, 6
 konjugiert, 17
 linearer, 6

p -rational, 42
 treuer, 6
 trivialer, 6
 verallgemeinerter, 9
 virtueller, 9
 Zentrum, 12

Charaktergruppe, 55
Charaktertafel, 10
 A_4 , 12
 A_5 , 53
 abelsche Gruppe, 11
 $C_2 \times C_2$, 11
 C_n , 11
 D_{2n} , 54
 S_5 , 48
Clifford-Korrespondenz, 18

D

Dade, 35
Darstellung, 4
 ähnlich, 4
 Grad, 4
 irreduzibel, 5
 reduzibel, 5
 reguläre, 54
 treue, 4
 triviale, 4
Deflation, 4
 Δ -invariant, 5
Diedergruppe, 54
Doppelnebenklassen, 23

E

elementar, 23
Exponent, 26

F

Frattini Argument, 43
Frobenius, 21, 31, 36
Frobenius-Reziprozität, 17
Frobenius-Young, 47
Frobeniusgruppe, 21
Frobeniuskern, 22

Frobeniuskomplement, 21
Frobenius-Schur-Indikator, 29

G

Gallagher, 19
ganz-algebraisch, 13
Gruppenoperation, 20

H

Haken, 48
Hakenformel, 48
Hallgruppe, 42

I

Induktion, 16
Inflation, 4
Involution, 30
Itô, 18

J

Jordan, 40

K

K -Darstellung, 26
Klassenfunktion, 6
Kommutator, 11
Kommutatorgruppe, 11
Konjugationsklasse, 6
Kronecker-Produkt, 10

M

Mackey, 23
Maschke, 5
Matrixdarstellung, 4
 triviale, 4
M-Gruppe, 27
monomial, 27
Murnaghan-Nakayama-Formel, 49

N

normales Komplement, 21
Normalisator, 17

O

Orthogonalitätsrelation
 erste, 7
 zweite, 8

P

Partition, 46
 p -Faktor, 33
 π -Element, 33
 π -Faktor, 33
 π -Gruppe, 33

Q

quasi-elementar, 23

S

Satz von der Fokalgruppe, 37
Schur-Relationen, 7
Schurs Lemma, 5

Solomon, 24

T

Taketa, 28
Taunt, 19
Trägheitsgruppe, 17

U

unitäre Gruppe, 40

V

Verzweigungsindex, 18
Verzweigungsregel, 49

W

Wielandt, 36, 44

Y

Young-Diagramm, 46
Young-Tableau, 46
Young-Untergruppe, 46

Z

Zentralisator, 6