Mengenlehre

Benjamin Sambale
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Version: 15. November 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegenden Notizen sind im Rahmen eines Seminars im Sommersemester 2019 an der Friedrich-Schiller-Universität Jena entstanden. Grundlage des Seminars war das Buch „The joy of sets“ von K. Devlin. Die folgenden Seiten haben allerdings recht wenig mit dem Buch gemeinsam, sondern dienen eher meiner eigenen Referenz.

1 Logik

Definition 1.1.

(i) Eine *Aussage* A ist ein Ausdruck, der entweder den Wahrheitswert *wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) annimmt. Man sagt dann A *gilt* bzw. A *gilt nicht*.

(ii) Für Aussagen A und B sind auch $\neg A$ (*nicht* A), $A \wedge B$ (A *und* B), $A \vee B$ (A *oder* B), $A \Rightarrow B$ (A *impliziert* B) und $A \Leftrightarrow B$ (A *genau dann wenn* B) Aussagen mit den offensichtlichen Wahrheitswerten.

(iii) Ein *Prädikat* ist eine Aussage $A = A(x)$, deren Wahrheitswert von einer Variablen x abhängt. Dann sind $\forall x : A(x)$ (*für alle* x gilt $A(x)$) und $\exists x : A(x)$ (*es existiert* ein x, sodass $A(x)$ gilt) Aussagen.

Bemerkung 1.2.

(i) Im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch ist das mathematische *oder* nicht zum *entweder oder* gleichbedeutend. Das heißt, die Aussage $\mathbf{w} \vee \mathbf{w}$ ist wahr.

(ii) Man kann den Wahrheitswert einer Aussage durch Wahrheitstabellen bestimmen. Zum Beispiel gilt

A	B	$A \Rightarrow B$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**w**
f	**f**	**w**

Lemma 1.3. *Für Aussagen A, B und C gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $(A \wedge \mathbf{w}) \Leftrightarrow A$ *und* $(A \vee \mathbf{f}) \Leftrightarrow A$ (*Neutralität*).

(ii) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ *und* $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ (*Idempotenz*).

(iii) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ *und* $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ (*Kommutativität*).

(iv) $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$, $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ *und* $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ (*Assoziativität*). *Die Aussagen $A \wedge B \wedge C$ usw. sind also wohldefiniert.*

(v) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ *und* $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (*Distributivität*).

(vi) $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$ (*doppelte Negation*).

(vii) $A \vee \neg A$ (*Satz vom ausgeschlossenen Dritten*) *und* $\neg(A \wedge \neg A)$ (*Satz vom Widerspruch*).

(viii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ *und* $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (De Morgan*sche Regeln*).

(ix) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (*Kontraposition*).

(x) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (*Transitivität*).

(xi) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (*Modus ponens*)

(xii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$.

Beweis. Alle Aussagen lassen sich durch Wahrheitstabellen verifizieren. Alternativ kann man Aussagen auch aus anderen Aussagen herleiten. So folgt der Satz vom Widerspruch aus dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten durch Anwendung der ersten De Morganschen Regel und der doppelten Negation. □

Bemerkung 1.4.

(i) Die De Morganschen Regeln lassen sich allgemeiner in der Form $(\neg\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : (\neg A(x))$ und $(\neg\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : (\neg A(x)))$ für Prädikate formulieren.

(ii) Lemma 1.3 zeigt, dass man mit den Symbolen $\neg$ und $\wedge$ alle weiteren Terme bilden kann.

2 Mengen

Definition 2.1 (Cantor)**.** Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Man sagt dann: x ist ein *Element* von M und schreibt $x \in M$ sowie $M = \{x : x \in M\}$ (bzw. $x \notin M$ für $\neg(x \in M)$). Man nennt M *leer*, *endlich* bzw. *unendlich*, falls M keine Elemente, endlich viele bzw. unendlich viele Elemente enthält.

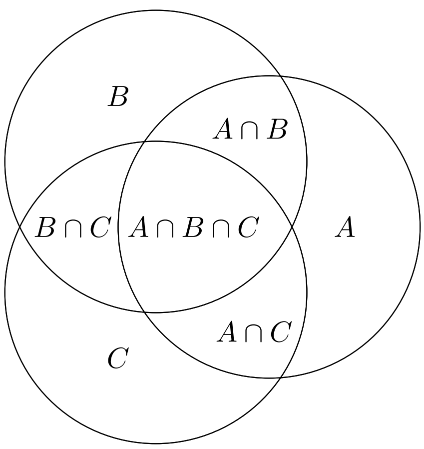
Bemerkung 2.2 (Russellsche Antinomie)**.** Definition 2.1 ist ungenau, denn sie lässt Mengen zu, die zu logischen Widersprüchen führen. Sei beispielsweise M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Die Aussage $M \in M$ kann dann weder wahr noch falsch sein. Um solche Widersprüche zu verhindern, führt man ein Axiomensystem ein (Definition 2.5).

Definition 2.3. Für Mengen A und B sei

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x : x \in A \vee x \in B\} && (\textit{Vereinigung}),\\ A \cap B &:= \{x : x \in A \wedge x \in B\} && (\textit{Durchschnitt}),\\ A \setminus B &:= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} && (\textit{Differenz}) \end{aligned}$$

(die Schreibweise := besagt, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird). Im Fall $A \cup B = B$ ist A eine *Teilmenge* von B. Man schreibt dann $A \subseteq B$ oder $A \subsetneq B$, falls zusätzlich $A \neq B$ (man spricht dann von einer *echten* Teilmenge). Ist A keine Teilmenge von B, so schreibt man $A \nsubseteq B$.

Bemerkung 2.4. Vereinigungen und Durchschnitte von Mengen lassen sich graphisch durch Venn-*Diagramme* darstellen:



Definition 2.5 (Zermelo-Fraenkel)**.** Jedes mathematische Objekt wird formal aus Mengen konstruiert. Dabei sind ausschließlich folgende *Axiome* zugelassen (dies sind Aussagen, deren Wahrheitswert auf **w** festgelegt ist):

(1) (Unendlichkeitsaxiom) Es existiert eine unendliche Menge M mit $x \in M \Rightarrow x \cup \{x\} \in M$.

(2) (Extensionalitätsaxiom) Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

(3) (Fundierungsaxiom) Jede nichtleere Menge M besitzt ein Element $x \in M$, sodass $M \cap x$ leer ist.

(4) (Ersetzungsaxiom) Sei $A(x, y)$ ein Prädikat mit der Eigenschaft $(A(x, y) \wedge A(x, z)) \Rightarrow y = z$. Für jede Menge B existiert dann eine Menge C mit $x \in C \Leftrightarrow (\exists y \in B : A(x, y))$.

(5) (Vereinigungsaxiom) Für jede Menge A existiert eine Menge B mit der Eigenschaft $x \in B \Leftrightarrow (\exists C \in A : x \in C)$. Man schreibt $B = \bigcup_{a \in A} a$.

(6) (Potenzmengenaxiom) Für jede Menge M ist auch $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}$ eine Menge, die man *Potenzmenge* von M nennt.

(7) (Auswahlaxiom) Ist A eine Menge von nichtleeren Mengen, so existiert eine Menge B, die zu jeden $C \in A$ genau ein $x \in C$ enthält.

Bemerkung 2.6.

(i) In der Literatur finden sich weitere (historisch motivierte) Axiome, die man jedoch aus den oben genannten ableiten kann. Beispielsweise impliziert das Ersetzungsaxiom das

Aussonderungsaxiom: Ist $A(x)$ ein Prädikat und B eine Menge, so existiert eine Menge C mit $x \in C \Leftrightarrow (x \in B \wedge A(x))$

(wähle $A(x, y) := (x = y \wedge A(x))$). Man schreibt $C = \{x \in B : A(x)\}$. Aus dem Unendlichkeitsaxiom und dem Aussonderungsaxiom erhält man das

Leermengenaxiom: Es existiert eine leere Menge $\varnothing$.

(wähle $A(x) := \mathbf{f}$). Nach dem Extensionalitätsaxiom ist $\varnothing$ die einzige leere Menge. Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \varnothing$. Schließlich ergibt sich das

Paarmengenaxiom: Für Mengen A und B existiert eine Menge C, die nur A und B als Elemente hat.

Dafür wendet man das Ersetzungsaxiom auf

$$M := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

mit dem Prädikat

$$A(x, y) := (x = \varnothing \wedge y = A) \vee (x = \{\varnothing\} \wedge y = B)$$

an. Man schreibt $C = \{A, B\}$. Mit dem Vereinigungsaxiom folgt schließlich, dass $A \cup B$ tatsächlich eine Menge ist. Das Aussonderungsaxiom garantiert, dass auch $A \cap B$ und $A \setminus B$ Mengen sind.

(ii) Das Fundierungsaxiom verhindert die Russellsche Antinomie. Nach Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz ist es jedoch unmöglich zu beweisen, dass die Zermelo-Fraenkel-Axiome keine anderen Widersprüche liefern. Ist dies tatsächlich der Fall (wovon die meisten Mathematiker ausgehen), so besagt Gödels erster Unvollständigkeitssatz, dass es Aussagen gibt, deren Wahrheitswert sich nicht bestimmen lässt. Das bekannteste Beispiel hierfür ist die *Kontinuumshypothese* (siehe Bemerkung 8.7).

(iii) Manche Mathematiker verzichten auf das Auswahlaxiom, da es die Konstruktion kontraintuitiver Mengen zulässt: Das *Banach-Tarski-Paradoxon* besagt beispielsweise, dass man eine dreidimensionale Kugel in endlich viele Teile zerlegen kann, die anders zusammengesetzt zwei Kugeln vom gleichen Volumen wie die Ausgangskugel ergeben.

(iv) In seltenen Fällen benötigt man Objekte, die zu „groß" sind um Mengen zu sein. Diese heißen *Klassen*. Zum Beispiel ist die Gesamtheit aller Mengen eine Klasse (Bemerkung 8.7).

Lemma 2.7. *Für Mengen A, B und C gilt:*

(i) $A \cup A = A = A \cap A$ *(Idempotenz).*

(ii) $A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität).*

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *und* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativität).*

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Distributivität).*

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ *und* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ *(De Morgansche Regeln).*

(vi) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Beweis. Durch logische Deduktion mittels Lemma 1.3 oder mit Venn-Diagrammen. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$ □

3 Relationen

Definition 3.1.

(i) Seien A und B Mengen mit $a \in A$ und $b \in B$. Dann heißt $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (*geordnetes*) *Paar* von a und b. Im Gegensatz zur Menge $\{a, b\}$ gilt $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$.

(ii) Die Menge
$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$
heißt *kartesisches Produkt* von A und B.

(iii) Induktiv definiert man *Tripel* $(a, b, c) := (a, (b, c))$ und allgemeiner *n-Tupel* $(a_1, \ldots, a_n) := (a_1, (a_2, \ldots, a_n))$ für $n \geq 2$. Analog ist $A_1 \times \ldots \times A_n := A_1 \times (A_2 \times \ldots \times A_n)$ für Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Speziell setzt man $A^n := A \times \ldots \times A$ (n Faktoren).

(iv) Eine *Relation* auf A ist eine Teilmenge $\sim \subseteq A \times A$. Man schreibt dann $a \sim b$, falls $(a, b) \in \sim$. Man nennt $\sim$

- *reflexiv*, falls $\forall a \in A : a \sim a$.
- *symmetrisch*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$.
- *antisymmetrisch*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \sim a \Rightarrow a = b)$.
- *transitiv*, falls $\forall a, b, c \in A : (a \sim b \sim c \Rightarrow a \sim c)$.
- *total*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \vee b \sim a)$.
- *Äquivalenzrelation*, falls $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- *Ordnungsrelation*, falls $\sim$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

(v) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A und $a \in A$, so nennt man $[a] := \{b \in A : a \sim b\} \subseteq A$ die *Äquivalenzklasse* von a.

Beispiel 3.2. Auf jeder Menge M ist die Gleichheitsrelation eine Äquivalenzrelation und die Teilmengenrelation $\subseteq$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

Lemma 3.3. *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so existiert ein $\mathcal{R} \subseteq A$, sodass A die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen $[r]$ mit $r \in \mathcal{R}$ ist.*

Beweis. Seien $a, b \in A$ und $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt $a \sim c$ und $b \sim c$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt $c \sim b$. Da $\sim$ transitiv ist, gilt $a \sim b$. Für jedes $d \in [b]$ gilt also $a \sim b \sim d$ und $a \sim d$. Dies zeigt $[b] \subseteq [a]$ und analog erhält man $[a] \subseteq [b]$. Es folgt $[a] = [b]$. Somit sind je zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt. Die Existenz von $\mathcal{R}$ folgt nun aus dem Auswahlaxiom. $\square$

Bemerkung 3.4. In der Situation von Lemma 3.3 nennt man $\mathcal{R}$ ein *Repräsentantensystem* für die Äquivalenzklassen.

4 Funktionen

Definition 4.1.

(i) Seien A und B Mengen. Eine *Funktion* oder *Abbildung* von A nach B ist eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$, sodass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ existiert. Man schreibt dann $f(a) = b$ und

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto f(a)$$

anstatt $(a, b) \in f$. Die Menge aller Funktionen $A \to B$ wird mit B^A bezeichnet. Außerdem heißt A *Definitionsbereich* und B *Wertebereich* von f.

(ii) Man nennt $f(a)$ das *Bild* von $a \in A$ unter f und $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ ist das *Bild* von f. Für $C \subseteq B$ ist $f^{-1}(C) := \{a \in A : f(a) \in C\} \subseteq A$ das *Urbild* von C unter f.

(iii) Man nennt f

- *injektiv*, falls $\forall a, a' \in A : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$.
- *surjektiv*, falls $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$, d. h. $f(A) = B$.
- *bijektiv* (oder *Bijektion*), falls f injektiv und surjektiv ist. Man nennt dann A und B *gleichmächtig*.
- *Permutation*, falls f bijektiv ist und $A = B$. Die Menge aller Permutationen auf A wird mit $\mathrm{Sym}(A)$ bezeichnet.

(iv) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so auch $g \circ f : A \to C$ mit $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ für $a \in A$. Man nennt $g \circ f$ die *Komposition* (oder *Hintereinanderausführung*, *Verkettung*) von f und g.

(v) Ist $f : A \to B$ eine Funktion und $C \subseteq A$, so ist auch die *Einschränkung* $f_{|C} : C \to B$, $c \mapsto f(c)$ eine Funktion.

Beispiel 4.2.

(i) Für jede Menge A und $B \subseteq A$ ist $f : B \to A$, $b \mapsto b$ eine injektive Funktion, die man *Inklusion(sabbildung)* oder *Einbettung* nennt. Im Fall $B = A$ ist f sogar bijektiv und man nennt $\mathrm{id}_A := f$ *Identität* auf A.

(ii) Für Mengen A und B ist $f : A \times B \to B \times A$, $(a, b) \mapsto (b, a)$ sicher eine Bijektion.

(iii) Für eine beliebige Indexmenge I und Mengen A_i $(i \in I)$ kann man das kartesische Produkt $\bigtimes_{i\in I} A_i$ als Menge aller Funktionen $I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $f(i) \in A_i$ für $i \in I$ definieren. Für endliches I ist dies zu unserer ursprünglichen Definition äquivalent. Man schreibt die Elemente in $\bigtimes_{i\in I} A_i$ daher auch in der Form $(a_i)_{i\in I}$.

(iv) Zwei endliche Mengen A und B sind offenbar genau dann gleichmächtig, wenn $|A| = |B|$ (siehe auch Satz 7.6).

Lemma 4.3. *Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Funktionen mit $A \neq \varnothing$. Dann gilt*

(i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) =: h \circ g \circ f$ (Assoziativität).

(ii) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

(iii) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

(iv) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(vi) Genau dann ist f injektiv, falls eine Funktion $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ existiert.

(vii) Genau dann ist f surjektiv, falls eine Funktion $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert.

(viii) Genau dann ist f bijektiv, falls eine Funktion $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert. Ggf. ist g eindeutig bestimmt und man nennt $f^{-1} := g$ die Umkehrfunktion *von f.*

Beweis.

(i) Für $a \in A$ ist $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a)$.

(ii) Für $a, a' \in A$ mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ gilt $g(f(a)) = g(f(a'))$, also $f(a) = f(a')$ und $a = a'$.

(iii) Es gilt $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = B$.

(iv) Sei $f(a) = f(a')$ für $a, a' \in A$. Dann ist $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $a = a'$. Also ist f injektiv.

(v) Es gilt $C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq C$, also $g(B) = C$.

(vi) Ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f injektiv nach (iv). Sei umgekehrt f injektiv und $c \in A$ fest gewählt (beachte: $A \neq \varnothing$). Wir definieren $g : B \to A$ wie folgt: ist $b = f(a)$ für ein $a \in A$, so sei $g(b) := a$ und anderenfalls $g(b) := c$. Da f injektiv ist, ist g dadurch wohldefiniert. Außerdem gilt $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$ für $a \in A$, also $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

(vii) Ist $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f surjektiv nach (v). Sei umgekehrt f surjektiv, d. h. $f(A) = B$. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Funktion $g : B \to A$ mit $g(b) \in f^{-1}(b)$ für alle $b \in B$. Offenbar gilt $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = b$, d. h. $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

(viii) Ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f injektiv und surjektiv nach (iv) und (v), also auch bijektiv. Sei umgekehrt f bijektiv. Nach (vi) und (vii) existieren $g : B \to A$ und $h : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ h = \mathrm{id}_B$. Dann gilt $g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h$. Dies zeigt auch, dass g eindeutig bestimmt ist. $\square$

Satz 4.4 (Cantor-Bernstein)**.** *Seien A und B Mengen mit injektiven Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$. Dann sind A und B gleichmächtig.*

Beweis. Wir definieren $C_0 := A \setminus g(B)$ und $C_n := g(f(C_{n-1}))$ für $n \geq 1$. Weiter sei $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ und $h : A \to B$ mit

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in C, \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \notin C. \end{cases}$$

Im Fall $x \notin C$ ist $x \notin C_0$, d. h. $x \in g(B)$. Folglich ist $g^{-1}(x)$ durch die Injektivität von g eindeutig bestimmt und h ist wohldefiniert. Seien nun $x, y \in A$ mit $h(x) = h(y)$. Nehmen wir $x \in C$ und $y \notin C$ an. Dann ist $f(x) = g^{-1}(y)$ und $g(f(x)) = y$. Sei $x \in C_n$ für ein $n \geq 0$. Dann folgt der Widerspruch $y = g(f(x)) \in g(f(C_n)) = C_{n+1} \subseteq C$. Also gilt $x, y \in C$ oder $x, y \notin C$ und man erhält $x = y$. Somit ist h injektiv.

Sei nun $y \in B$ beliebig. Im Fall $g(y) \notin C$ ist $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$. Sei also $g(y) \in C_n$ für ein $n \geq 1$. Es existiert dann ein $x \in C_{n-1}$ mit $g(f(x)) = g(y)$. Aus der Injektivität von g folgt $h(x) = f(x) = y$. Also ist h auch surjektiv und bijektiv. $\square$

5 Geordnete Mengen

Definition 5.1. Sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf einer Menge A und $B \subseteq A$.

(i) Wie üblich benutzen wir die Schreibweisen $a \geq a'$ (falls $a' \leq a$), $a < a'$ (falls $a \leq a' \neq a$) und $a > a'$ (falls $a' \leq a \neq a'$) für $a, a' \in A$.

(ii) Ein $b \in B$ heißt

- *größtes Element* von B, falls $\forall b' \in B : b' \leq b$.
- *maximales Element* von B, falls $\forall b' \in B : (b \leq b' \Rightarrow b = b')$.

(iii) Ein $a \in A$ heißt *obere Schranke* von B, falls $\forall b \in B : b \leq a$. Analog definiert man *kleinstes Element*, *minimales Element* und *untere Schranke*.

(iv) Man nennt A *wohlgeordnet*, falls jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element enthält.

(v) Für $a \in A$ sei $A^{<a} := \{a' \in A : a' < a\}$.

Bemerkung 5.2.

(i) Im Allgemeinen existieren weder größte Elemente, noch maximale Elemente, noch obere Schranken. Größte Elemente sind maximal und eindeutig, wenn sie existieren. In total geordneten Mengen ist jedes maximale Element auch das größte Element. Besitzt M ein größtes Element, so bezeichnet man es mit $\max M$ (analog $\min M$ für das kleinste Element).

(ii) Wohlgeordnete Mengen sind stets total geordnet. Umgekehrt ist eine total geordnete Menge bereits dann wohlgeordnet, wenn es keine unendliche Folge der Form $a_0 > a_1 > \ldots$ gibt. Insbesondere ist jede endliche total geordnete Menge wohlgeordnet.

(iii) Jede Teilmenge einer total (wohl)geordneten Menge ist total (wohl)geordnet.

Satz 5.3 (Transfinite Induktion)**.** *Sei $(A, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge. Sei $P(a)$ ein Prädikat, sodass für alle $a \in A$ gilt:*

$$(\forall b \in A^{<a} : P(b)) \Longrightarrow P(a).$$

Dann gilt $P(a)$ für alle $a \in A$.

Beweis. Wäre die Menge $\{a \in A : \neg P(a)\}$ nichtleer, so gäbe es ein kleinstes $a \in A$ mit $\neg P(a)$. Für jedes $b < a$ wäre aber $P(b)$ wahr. □

Lemma 5.4 (Zorn)**.** *Sei M eine geordnete Menge. Besitzt jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke, so enthält M ein maximales Element.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Da $\varnothing \subseteq M$ eine obere Schranke besitzt, ist $M \neq \varnothing$. Sei A eine total geordnete Teilmenge von M und $x \in M$ eine obere Schranke von A. Dann ist x nicht maximal. Daher existiert ein $y \in M$ mit $x < y$. Insbesondere ist $a < y$ für alle $a \in A$. Wir nennen y eine *echte* obere Schranke von A. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Funktion f, die jeder total geordneten Teilmenge $A \subseteq M$ eine echte obere Schranke $f(A)$ zuordnet. Für $a \in A$ ist auch $A^{<a}$ total geordnet. Wir nennen A *zulässig*, falls A wohlgeordnet und $f(A^{<a}) = a$ für jedes $a \in A$ ist. Offenbar ist $\varnothing$ zulässig. Für jede zulässige Teilmenge $A \subseteq M$ ist auch $A \cup \{f(A)\}$ zulässig, denn

$$(A \cup \{f(A)\})^{<a} = \begin{cases} A^{<a} & \text{falls } a \in A, \\ A & \text{falls } a = f(A). \end{cases}$$

Seien $A, B \subseteq M$ zulässig mit $A \neq B$, o. B. d. A. $B \nsubseteq A$. Da B wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes Element b in $B \setminus A$. Dann ist $B^{<b} \subseteq A$.

Annahme: $B^{<b} \neq A$.
Da A wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes Element a von $A \setminus B^{<b}$. Dann ist $A^{<a} \subseteq B^{<b}$. Wegen $B \nsubseteq A^{<a}$ existiert ein kleinstes Element c von $B \setminus A^{<a}$. Daher ist $B^{<c} \subseteq A^{<a} \subseteq B^{<b} \subseteq A$. Im Fall $b < c$ wäre $b \in B^{<c} \subseteq A$ im Widerspruch zur Wahl von b. Also ist $c \leq b$. Im Fall $c = b$ ist $A^{<a} = B^{<c}$. Im Fall $c < b$ ist $c \in B^{<b} \subseteq A$. Wegen $c \notin A^{<a}$ ist $c \geq a$, d. h. $A^{<a} \subseteq A^{<c} \cap B \subseteq B^{<c} \subseteq A^{<a}$. Daher ist in jedem Fall $A^{<a} = B^{<c}$. Da A und B zulässig sind, folgt $a = f(A^{<a}) = f(B^{<c}) = c \leq b$. Im Fall $c = b$ wäre $b = c = a \in A$ im Widerspruch zur Wahl von b. Also ist $a = c < b$ und wir haben den Widerspruch $a = c \in B^{<b}$.

Also gilt $A = B^{<b} \subseteq B$. Insbesondere ist die Menge $\mathcal{M}$ aller zulässigen Teilmengen von M total geordnet bzgl. $\subseteq$. Wir zeigen, dass $Z := \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A \subseteq M$ total geordnet bzgl. $\leq$ ist. Dazu seien $a, b \in Z$. Dann existieren $A, B \in \mathcal{M}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{M}$ bzgl. $\subseteq$ total geordnet ist, gilt o. B. d. A. $A \subseteq B$ und $a, b \in B$. Da B total geordnet ist, gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$. Sei nun $a \in A \in \mathcal{M}$. Wegen $A \subseteq Z$ ist $A^{<a} \subseteq Z^{<a}$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $b \in Z^{<a}$, d. h. insbesondere $b < a$.

Annahme: $b \notin A$.
Sei $b \in B \in \mathcal{M}$. Dann ist $B \nsubseteq A$, d. h. $A = B^{<c}$ für ein $c \in B$ nach dem ersten Teil des Beweises. Dann hat man den Widerspruch $b \geq c > a$.

Also ist $A^{<a} = Z^{<a}$. Wir zeigen nun, dass Z wohlgeordnet ist. Sei dafür $\varnothing \neq X \subseteq Z$. Dann existiert ein $A \in \mathcal{M}$ mit $X \cap A \neq \varnothing$ und ein kleinstes Element x in $X \cap A$. Also enthält $Z^x = A^x$ keine Elemente aus X, d. h. x ist das kleinste Element in X. Schließlich zeigen wir $Z \in \mathcal{M}$. Dazu sei $a \in A \in \mathcal{M}$. Dann ist $Z^{<a} = A^{<a}$ und $a = f(A^{<a}) = f(Z^{<a})$. Also ist Z zulässig. Dann ist aber auch $Z \cup \{f(Z)\}$ zulässig im Widerspruch zu $f(Z) \notin Z$. □

Bemerkung 5.5. Lemma 5.4 gilt auch in der dualen Version für untere Schranken und minimale Elemente, indem man $\leq$ durch $\geq$ ersetzt.

Satz 5.6 (Wohlordnungssatz)**.** *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Beweis. Sei M eine Menge und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare $(N, \leq_N)$, wobei $N \subseteq M$ durch $\leq_N$ wohlgeordnet ist. Da die leere Menge wohlgeordnet ist, ist $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Durch

$$(N_1, \leq_1) \leq (N_2, \leq_2) :\Longleftrightarrow N_1 \subseteq N_2,\ \leq_1 \subseteq \leq_2,\ \forall x \in N_1, y \in N_2 \setminus N_1 : x < y$$

ist $\mathcal{M}$ geordnet. Sei $\varnothing \neq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet und $S := \bigcup_{(N, \leq_N) \in \mathcal{N}} N \subseteq M$. Für $x, y \in S$ existieren $(N_1, \leq_1), (N_2, \leq_2) \in \mathcal{N}$ mit $x \in N_1$ und $y \in N_2$. Da $\mathcal{N}$ total geordnet ist, gilt o. B. d. A. $N_1 \subseteq N_2$. Wir definieren

$$x \leq_S y :\Longleftrightarrow x \leq_2 y.$$

Ist auch $(N_3, \leq_3) \in \mathcal{N}$ mit $x, y \in N_3$, so gilt $(N_2, \leq_2) \leq (N_3, \leq_3)$ oder $(N_3, \leq_3) \leq (N_2, \leq_2)$, da $\mathcal{N}$ total geordnet ist. Wegen $\leq_2 \subseteq \leq_3$ oder $\leq_3 \subseteq \leq_2$ gilt dann $x \leq_2 y \Leftrightarrow x \leq_3 y$. Daher hängt $\leq_S$ nicht von der Wahl von N_2 ab. Man zeigt leicht, dass $(S, \leq_S)$ eine geordnete Menge ist. Sei $\varnothing \neq T \subseteq S$ und $(N, \leq_N) \in \mathcal{N}$ mit $T \cap N \neq \varnothing$. Sei x das kleinste Element von $T \cap N$ bzgl. $\leq_N$. Sei $y \in T$ beliebig. Dann existiert $(N_1, \leq_1) \in \mathcal{N}$ mit $y \in N_1$. Im Fall $y \in N$ ist $x \leq_N y$ und $x \leq_S y$. Anderenfalls ist $(N, \leq) < (N_1, \leq_1)$ und $x <_S y$ nach Definition von $\leq$ auf $\mathcal{M}$. Daher ist x das kleinste Element von T und S ist wohlgeordnet. Insgesamt ist $(S, \leq_S) \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Nach Zorns Lemma existiert ein maximales Element $(A, \leq_A) \in \mathcal{M}$. Im Fall $A \neq M$ existiert $b \in M \setminus A$. Dann ist $A \cup \{b\}$ wohlgeordnet, indem man $a < b$ für alle $a \in A$ definiert. Dies widerspricht der Maximalität von $(A, \leq_A)$. Also ist $M = A$ wohlgeordnet. $\square$

Bemerkung 5.7. Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen, so lässt sich $\bigcup_{i \in I} A_i$ wohlordnen. Man kann dann für jedes A_i das kleinste Element von A_i auswählen. Auf diese Weise folgt das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz. Daher sind das Auswahlaxiom, Zorns Lemma und der Wohlordnungssatz zueinander äquivalent.

6 Ordinalzahlen

Definition 6.1. Eine Bijektion $f : A \to B$ zwischen geordneten Mengen $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ heißt *Isomorphismus*, falls $a \leq_A a' \Longrightarrow f(a) \leq_B f(a')$ für alle $a, a' \in A$ gilt. Man nennt A und B dann *isomorph* und schreibt $A \cong B$.

Bemerkung 6.2. Isomorphe geordnete Mengen haben sicher die gleichen Eigenschaften (total, wohlgeordnet, ...). Jede geordnete Menge ist durch die Identität zu sich selbst isomorph. Außerdem sind Kompositionen und Umkehrabbildungen von Isomorphismen wieder Isomorphismen. Die Isomorphie von geordneten Mengen ist daher eine Äquivalenzrelation. Wir bestimmen im Folgenden ein kanonisches Repräsentantensystem für die entsprechenden Äquivalenzklassen.

Lemma 6.3. *Zwischen wohlgeordneten Mengen A und B existiert höchstens ein Isomorphismus $A \to B$.*

Beweis. Seien $f, g : A \to B$ Isomorphismen und $h := g^{-1} \circ f$. Ist $\{a \in A : h(a) < a\}$ nichtleer, so existiert ein kleinstes Element $a \in A$ mit $h(a) < a$. Da h ein Isomorphismus ist, gilt auch $h(h(a)) < h(a) < a$ im Widerspruch zur Wahl von a. Daher ist $h(a) \geq a$ für alle $a \in A$. Wiederholt man das Argument mit $h^{-1} = f^{-1} \circ g$, so erhält man $h^{-1}(a) \geq a$ also $a \geq h(a) \geq a$ für alle $a \in A$. Dies zeigt $f = g$. $\square$

Definition 6.4. Eine wohlgeordnete Menge α heißt *Ordinalzahl*, falls $\alpha^{<x} = x$ für alle $x \in \alpha$ gilt.

Bemerkung 6.5. Sei α eine Ordinalzahl mit Ordnungsrelation $\leq$ und $x, y \in \alpha$. Dann gilt

$$x \leq y \iff \alpha^{<x} \subseteq \alpha^{<y} \iff x \subseteq y,$$

d. h. $\leq\, = \,\subseteq$. Eine Ordinalzahl ist also bereits durch die Angabe einer Menge eindeutig bestimmt. Außerdem gilt

$$x < y \iff x \in \alpha^{<y} \iff x \in y.$$

Lemma 6.6. *Für Ordinalzahlen α und β gilt:*

(i) *Jedes $x \in \alpha$ ist eine Ordinalzahl.*

(ii) $\beta \in \alpha \iff \beta \subsetneq \alpha$.

(iii) $\alpha \subseteq \beta$ *oder* $\beta \subseteq \alpha$.

(iv) $\alpha \cong \beta \implies \alpha = \beta$.

Beweis.

(i) Wegen $x = \alpha^{<x} \subseteq \alpha$ ist x wohlgeordnet. Für $y \in x$ gilt $x^{<y} = (\alpha^{<x})^{<y} = \alpha^{<y} = y$.

(ii) Für $\beta \in \alpha$ gilt $\beta = \alpha^{<\beta} \subseteq \alpha \setminus \{\beta\} \subsetneq \alpha$. Sei nun umgekehrt $\beta \subsetneq \alpha$. Sei x das kleinste Element von $\alpha \setminus \beta$. Dann gilt $x = \alpha^{<x} \subseteq \beta$. Für $y \in \beta$ gilt umgekehrt $\beta^{<y} = y = \alpha^{<y}$. Im Fall $y > x$ wäre $x \in \alpha^{<y} \subseteq \beta$. Also ist $y \leq x$ und $y < x$ wegen $x \notin \beta$. Dies zeigt $\beta \subseteq \alpha^{<x} = x$. Also ist $\beta = x \in \alpha$.

(iii) O. B. d. A. sei $\alpha \nsubseteq \beta$. Sei x das kleinste Element von $\alpha \setminus \beta$. Dann ist $x = \alpha^{<x} \subseteq \beta$. Im Fall $x \subsetneq \beta$ folgt der Widerspruch $x \in \beta$ aus (i) und (ii). Also ist $\beta = \alpha^{<x} \subseteq \alpha$.

(iv) Sei $f : \alpha \to \beta$ ein Isomorphismus und $A := \{x \in \alpha : f(x) \neq x\}$. Angenommen A besitzt ein kleinstes Element x. Dann ergibt sich der Widerspruch

$$f(x) = f(\alpha^{<x}) = \{f(x') : x' < x\} = \{x' : x' < x\} = \alpha^{<x} = x.$$

Also ist $M = \varnothing$. □

Lemma 6.7. *Sei A eine wohlgeordnete Menge, sodass $A^{<x}$ für alle $x \in A$ zu einer Ordinalzahl isomorph ist. Dann ist A selbst zu einer Ordinalzahl isomorph.*

Beweis. Für $x \in A$ sei α_x die nach Lemma 6.6 eindeutig bestimmte Ordinalzahl mit $A^{<x} \cong \alpha_x$. Nach Lemma 6.3 existiert genau ein Isomorphismus $f_x : A^{<x} \to \alpha_x$. Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} f : A &\to \{\alpha_x : x \in A\} =: M, \\ x &\mapsto \alpha_x \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist, wobei M durch $\subseteq$ geordnet ist. Für $y < x$ gilt $A^{<y} \subseteq A^{<x}$. Einschränken von f_x liefert einen Isomorphismus

$$A^{<y} \to f_x(A^{<y}) = \alpha_x^{<f_x(y)} = f_x(y) \in \alpha_x.$$

Nach Lemma 6.6 ist $f_x(y)$ eine Ordinalzahl und es folgt $f_x(y) = \alpha_y$. Dies zeigt $\alpha_y \subsetneq \alpha_x$. Also ist f ein Isomorphismus. Mit A ist auch M wohlgeordnet. Für $\alpha_x \in M$ gilt

$$M^{\alpha_x} = \{\alpha_y : \alpha_y \subsetneq \alpha_x\} = \{f_x(y) : y \in A^{<x}\} = f_x(A^{<x}) = \alpha_x.$$

Also ist M eine Ordinalzahl. □

Satz 6.8. *Jede wohlgeordnete Menge ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 6.6. Nach Lemma 6.7 genügt es zu zeigen, dass alle $A^{<x}$ $(x \in A)$ zu Ordinalzahlen isomorph sind. Sei $x \in A$ minimal, sodass $A^{<x}$ zu keiner Ordinalzahl isomorph ist. Für alle $y \in A^{<y}$ ist $(A^{<x})^{<y} = A^{<y}$ zu einer Ordinalzahl isomorph. Nach Lemma 6.7 wäre dann aber $A^{<x}$ selbst zu einer Ordinalzahl isomorph. $\square$

Bemerkung 6.9. Man kann Ordinalzahlen daher als Repräsentanten für die Isomorphieklassen von wohlgeordneten Mengen ansehen.

Lemma 6.10. *Für jede Ordinalzahl α ist auch der* Nachfolger $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ *eine Ordinalzahl.*

Beweis. Wie üblich ist α^+ durch $\subseteq$ geordnet. Sei $\varnothing \neq A \subseteq \alpha'$. Im Fall $A = \{\alpha\}$ ist α das kleinste Element von A. Anderenfalls ist das kleinste Element von $A \cap \alpha$ auch das kleinste Element von A. Also ist α' wohlgeordnet. Für $x \in \alpha$ ist $(\alpha^+)^{<x} = \alpha^{<x} = x$. Für $x = \alpha$ ist $(\alpha^+)^{<x} = \alpha = x$. Somit ist α^+ eine Ordinalzahl. $\square$

Beispiel 6.11. Die einzigen endlichen Ordinalzahlen sind die *natürlichen Zahlen*

$$0 := \varnothing, \qquad 1 := 0^+ = \{\varnothing\}, \qquad 2 := 1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \ldots.$$

Diese Zahlen stimmen mit ihrer (gewohnten) Mächtigkeit überein. Die kleinste unendliche Ordinalzahl ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ (Unendlichkeitsaxiom). Die transfinite Induktion wird für $\mathbb{N}$ zur *vollständigen Induktion.*

7 Kardinalzahlen

Satz 7.1. *Jede Menge von Ordinalzahlen ist wohlgeordnet bzgl. $\subseteq$.*

Beweis. Eine Menge $\mathcal{M}$ von Ordinalzahlen ist nach Lemma 6.6 total geordnet bzgl. $\subseteq$. Angenommen $\mathcal{M}$ enthält Elemente $\alpha_1 \supsetneq \alpha_2 \supsetneq \ldots$. Aus Lemma 6.6 folgt $\alpha_2, \alpha_2, \ldots \in \alpha_1$. Dann kann α_1 aber nicht wohlgeordnet (bzgl. $\subseteq$) sein. $\square$

Bemerkung 7.2 (Burali-Forti-Paradoxon)**.** Die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Ordinalzahlen ist keine Menge: Anderenfalls wäre $\mathcal{M}$ nach Satz 7.1 wohlgeordnet. Für $\alpha \in \mathcal{M}$ gilt dann

$$\mathcal{M}^\alpha = \{\beta \in \mathcal{M} : \beta \subsetneq \alpha\} \overset{6.6}{=} \{\beta \in \mathcal{M} : \beta \in \alpha\} = \alpha,$$

d. h. $\mathcal{M}$ ist selbst eine Ordinalzahl. Damit hat man den Widerspruch $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$, d. h. $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}$.

Definition 7.3. Jede Menge M kann nach dem Wohlordnungssatz wohlgeordnet werden. Nach Satz 6.8 ist M mit dieser Wohlordnung zu einer Ordinalzahl isomorph. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Ordinalzahlen, die bzgl. irgendeiner Ordnung zu M isomorph sind. Nach Satz 7.1 besitzt $\mathcal{M}$ ein kleinstes Element, welches man als *Kardinalzahl* $|M|$ von M bezeichnet.

Bemerkung 7.4.

(i) Als Ordinalzahlen lassen sich Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets vergleichen, d. h. es gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Wir schreiben dann $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}$. Für beliebige Mengen A und B ist die Ungleichung $|A| \le |B|$ äquivalent zur Existenz einer injektiven Abbildung $A \to B$. Der Satz von Cantor-Bernstein ist daher nichts weiter als die Antisymmetrie von $\le$.

(ii) Für jede Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ gilt $|\mathfrak{a}| = \mathfrak{a}$.

(iii) Alle natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}$ selbst sind Kardinalzahlen.

(iv) Eine Menge M heißt *abzählbar* (bzw. *überabzählbar*), falls $|M| = \mathbb{N}$ (bzw. $|M| > \mathbb{N}$). Im ersten Fall lassen sich die Elemente von M mit $\mathbb{N}$ indizieren, d. h. $M = \{a_0, a_1, \ldots\}$.

Beispiel 7.5. Die Abbildung $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ mit $f(\mathbb{N}) := 0$ und $f(n) := n^+$ für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Bijektion. Dies zeigt $|\mathbb{N}^+| = \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\mathbb{N}^+$ eine Ordinalzahl, aber keine Kardinalzahl. Wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), \ldots\}$ ist auch $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \mathbb{N}$.

Satz 7.6. *Zwei Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie die gleiche Kardinalzahl besitzen.*

Beweis. Seien A und B Mengen. Gilt $|A| = |B|$, so sind A und B gleichmächtig. Sind umgekehrt A und B gleichmächtig, so sind auch $|A|$ und $|B|$ gleichmächtig. Sei $f : |A| \to |B|$ eine Bijektion. Für $x, y \in |A|$ gilt dann

$$x < y \iff x \subseteq y \iff f(x) \subseteq f(y) \iff f(x) < f(y).$$

Daher ist f ein Isomorphismus. Aus Lemma 6.6 folgt $|A| = |B|$. $\square$

8 Arithmetik von Kardinalzahlen

Definition 8.1. Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ definieren wir

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := |\mathfrak{a} \cup (1 \times \mathfrak{b})|, \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|,$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} := |\{\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}\}|, \qquad \mathfrak{a}! := |\mathrm{Sym}(\mathfrak{a})|.$$

Man sagt: $\mathfrak{a}$ *plus* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ *mal* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ *hoch* $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ *Fakultät.*

Bemerkung 8.2.

(i) Die Konstruktion $1 \times \mathfrak{b}$ bewirkt, dass $\mathfrak{a}$ und $1 \times \mathfrak{b}$ stets disjunkt sind (beachte: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$). Die Notation $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ ist doppeldeutig, denn sie bezeichnet sowohl die Menge aller Abbildungen $\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ als auch deren Kardinalzahl.

(ii) Für eine beliebige Familie von Kardinalzahlen $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ definiert man allgemeiner

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \Big| \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \mathfrak{a}_i \Big|, \qquad \prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \Big| \bigtimes_{i \in I} \mathfrak{a}_i \Big|.$$

Sind alle $\mathfrak{a}_i \ne 0$, so zeigt das Auswahlaxiom $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i \ne 0$. Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt $\sum_{a \in \mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $\prod_{a \in \mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ (Beispiel 4.2). Nach Beispiel 7.5 ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.

(iii) Um Klammern zu sparen verabreden wir im Folgenden Punkt- vor Strichrechnung, d. h. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{c} := (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$.

Satz 8.3. *Für Mengen A und B gilt*

(i) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$,

(ii) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$,

(iii) $|A^B| = |A|^{|B|}$,

(iv) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$,

(v) $|\mathrm{Sym}(A)| = |A|!$.

Beweis. Für die Konstruktion geeigneter Bijektionen (Satz 7.6) kann man annehmen, dass A und B Kardinalzahlen sind. Dann sind (ii), (iii) und (v) erledigt. Für (i) benutzt man die Bijektion $f : (A \cup B) \cup (1 \times (A \cap B)) \to A \cup (1 \times B)$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in A \setminus B, \\ (0, x) & \text{falls } x \in B, \end{cases}$$
$$f(0, x) := x \qquad (x \in A \cap B).$$

Für (iv) benutzt man die Bijektion $f : \mathcal{P}(A) \to 2^A$, $B \mapsto f_B$ mit

$$f_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B, \\ 0 & \text{falls } x \notin B. \end{cases}$$ □

Satz 8.4. *Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} + 0 = 0, & \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, & (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \\ \mathfrak{a} \cdot 1 = \mathfrak{a}, & \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}, & (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}), \\ \mathfrak{a}^0 = 1, & \mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, & 1^{\mathfrak{a}} = 1, \\ \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}, & (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}, & (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}, \\ \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}, & 0! = 1, & (\mathfrak{a} + 1)! = \mathfrak{a}! \cdot (\mathfrak{a} + 1). \end{array}$$

Beweis. Die meisten Behauptungen sind offensichtlich. Wir zeigen nur folgende:

- $\mathfrak{a}^0 = |\{\varnothing \to \mathfrak{a}\}| = \{\varnothing\} = 1$.
- Die Abbildung $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \to \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+c}$, $(f, g) \mapsto h$ mit

  $$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathfrak{b}, \\ g(x) & \text{falls } x \in \mathfrak{c} \end{cases}$$

  ist eine Bijektion.
- Die Abbildung $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} \to (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}$, $(f, g) \mapsto h$ mit

  $$g(x) := (f(x), g(x))$$

  für $x \in \mathfrak{c}$ ist eine Bijektion.
- Die Abbildung $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} \to \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}$, $f \mapsto g$ mit

  $$g(x, y) := (f(y))(x)$$

  ist eine Bijektion.

- $0! = |\mathrm{Sym}(\varnothing)| = |\{\varnothing \to \varnothing\}| = 0^0 = 1$.
- Sei $A := \mathfrak{a} \cup \{x\}$ mit $|A| = \mathfrak{a} + 1$. Dann ist die Abbildung $A \times \mathrm{Sym}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{Sym}(A)$, $(a, f) \mapsto g$ mit

$$g(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x, \\ f(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases} \qquad (y \in A)$$

eine Bijektion. □

Bemerkung 8.5. Für $\mathfrak{a} > 0$ gilt $0^{\mathfrak{a}} = |\{\mathfrak{a} \to \varnothing\}| = |\varnothing| = 0$.

Satz 8.6. *Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{d}$ gilt:*

(i) $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$,

(ii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{b} + \mathfrak{d}$,

(iii) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}$,

(iv) $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{b}^{\mathfrak{d}}$ *falls* $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} > 0$.

Beweis.

(i) Die injektive Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})$, $x \mapsto \{x\}$ zeigt $\mathfrak{a} \leq |\mathcal{P}(\mathfrak{a})| = 2^{\mathfrak{a}}$. Nehmen wir nun an, dass eine Bijektion $f : \mathfrak{a} \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ existiert. Sei $A := \{x \in \mathfrak{a} : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})$. Dann existiert ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $f(x) = A$. Es folgt der Widerspruch $x \in A = f(x) \Leftrightarrow x \notin f(x)$.

(ii) Es gilt $\mathfrak{a} \cup (1 \times \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{b} \times (1 \times \mathfrak{d})$.

(iii) Es gilt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b} \times \mathfrak{d}$.

(iv) Im Fall $\mathfrak{a} = 0$ ist $\mathfrak{c} > 0$ und $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = 0 \leq \mathfrak{b}^{\mathfrak{d}}$ nach Bemerkung 8.5. Sei also $\mathfrak{a} > 0$ und $x \in \mathfrak{a}$. Dann lässt sich jede Abbildung $f : \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$ zu $\hat{f} : \mathfrak{d} \to \mathfrak{b}$ fortsetzen, indem man $\hat{f}(y) = x$ für $y \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{c}$ setzt. Dies liefert eine injektive Abbildung $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \to \mathfrak{b}^{\mathfrak{d}}$, $f \mapsto \hat{f}$. □

Bemerkung 8.7.

(i) (Cantors erste Antinomie) Die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Kardinalzahlen ist keine Menge: Anderenfalls wäre auch $\mathcal{M}' := \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{M}} \mathfrak{a}$ eine Menge und $2^{|\mathcal{M}'|} \subseteq \mathcal{M}'$ in Widerspruch zu $|\mathcal{M}'| < 2^{|\mathcal{M}'|}$.

(ii) (Cantors zweite Antinomie) Die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Mengen ist keine Menge (gleiches Argument).

(iii) Die *Kontinuumshypothese* besagt, dass keine Kardinalzahl zwischen $\mathbb{N}$ und $2^{\mathbb{N}}$ liegt. Dies lässt sich mit den Zermelo-Fraenkel-Axiomen weder beweisen noch widerlegen. Die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese* besagt, dass für jede unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ keine Kardinalzahl echt zwischen $\mathfrak{a}$ und $2^{\mathfrak{a}}$ liegt. Die ersten Kardinalzahlen würden dann lauten:

$$1, 2, \ldots, \mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{2^{\mathbb{N}}}, \ldots$$

(iv) Unabhängig von der Kontinuumshypothese besitzt jede Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ genau einen Nachfolger, nämlich das kleinste Elemente aus $\{|A| : A \subseteq 2^{\mathfrak{a}},\ |A| > \mathfrak{a}\}$.

Satz 8.8 (Cantor)**.** *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Kardinalzahlen mit $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \geq \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$,

(ii) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ *falls* $\mathfrak{a} > 0$,

(iii) $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$ *falls* $\mathfrak{a} > 1$,

(iv) $\mathfrak{b}! = 2^{\mathfrak{b}}$

Beweis.

(i) Ist $\mathfrak{a}$ endlich, so liefert $f : \mathfrak{a} \cup (1 \times \mathfrak{b}) \to \mathfrak{b}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x + \mathfrak{a} & \text{falls } x \in \mathbb{N} \setminus \mathfrak{a}, \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

die gewünschte Bijektion (beachte: $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathfrak{b}$). Sei nun $\mathfrak{a}$ unendlich. Wegen $\mathfrak{b} \le \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \le \mathfrak{b} + \mathfrak{b}$ (Satz 8.6) können wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ annehmen. Es genügt eine Bijektion $2 \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ zu konstruieren. Im Fall $\mathfrak{b} = \mathbb{N}$ betrachte man $(0, n) \to 2 \cdot n$ und $(1, n) \to 2 \cdot n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\mathfrak{b}$ überabzählbar und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare (B, α), wobei $B \subseteq \mathfrak{b}$ und $\alpha : 2 \times B \to B$ eine Bijektion ist. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{b}$ ist $\mathcal{M}$ nichtleer und durch

$$(B, \alpha) \le (B', \alpha') :\Longleftrightarrow B \subseteq B',\ \alpha'_{|2 \times B} = \alpha$$

geordnet. Sei $\varnothing \ne \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Dann ist $C := \bigcup_{(B,\alpha) \in \mathcal{N}} B \subseteq \mathfrak{b}$. Wir definieren $\beta : 2 \times C \to C$ durch $\beta(x) = \alpha(x)$ falls $x \in 2 \times B$ und $(B, \alpha) \in \mathcal{N}$. Offenbar ist β wohldefiniert und bijektiv. Daher ist $(C, \beta) \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Nach Zorns Lemma besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element (B, α). Enthält $\mathfrak{b} \setminus B$ eine abzählbare Teilmenge C, so existiert wie oben eine Bijektion $2 \times C \to C$ und wir können α nach $2 \times (B \cup C)$ fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität von (B, α). Also ist $\mathfrak{b} \setminus B$ endlich. Wie oben ist dann $\mathfrak{b} = |B| + |\mathfrak{b} \setminus B| = B$ und wir sind fertig.

(ii) Wegen $\mathfrak{b} = 1 \times \mathfrak{b} \le \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \le \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ können wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ annehmen. Es genügt eine Bijektion $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ zu konstruieren. Der Fall $\mathfrak{b} = \mathbb{N}$ wurde in Beispiel 7.5 erledigt. Sei nun $\mathfrak{b}$ überabzählbar und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare (B, α), wobei $B \subseteq \mathfrak{b}$ und $\alpha : B \times B \to B$ eine Bijektion ist. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{b}$ ist $\mathcal{M}$ nichtleer und durch

$$(B, \alpha) \le (B', \alpha') :\Longleftrightarrow B \subseteq B',\ \alpha'_{|B \times B} = \alpha$$

geordnet. Sei $\varnothing \ne \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Dann ist $C := \bigcup_{(B,\alpha) \in \mathcal{N}} B \subseteq \mathfrak{b}$. Wir definieren $\beta : C \times C \to C$ durch $\beta(x) = \alpha(x)$ falls $x \in B \times B$ und $(B, \alpha) \in \mathcal{N}$. Offenbar ist β wohldefiniert und bijektiv. Daher ist $(C, \beta) \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Nach Zorns Lemma besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element (B, α). Im Fall $B < \mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{b} = |B| + |\mathfrak{b} \setminus B| = |\mathfrak{b} \setminus B|$ nach (i). Insbesondere existiert $C \subseteq \mathfrak{b} \setminus B$ mit $|C| = |B|$. Wegen $|C \times C| = |B \cdot B| = |B| = |C| = |B \times C| = |C \times B|$ und $|B \cup C| = |B| + |C| = |C| + |C| \overset{\text{(i)}}{=} |C|$ existiert eine Bijektion

$$(B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C) \to C.$$

Also lässt sich α zu

$$(B \cup C) \times (B \cup C) = (B \times B) \cup (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)$$

fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität von (B, α). Also ist $\mathfrak{b} = B$ und wir sind fertig.

(iii) Nach (ii) gilt $2^{\mathfrak{b}} \le \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \le \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}} \le (2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$.

(iv) Wegen $\mathfrak{b}! = |\mathrm{Sym}(\mathfrak{b})| \leq |\mathcal{P}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b})| = |\mathcal{P}(\mathfrak{b})| = 2^{\mathfrak{b}}$ genügt es eine injektive Abbildung $f : \mathcal{P}(\mathfrak{b}) \to \mathrm{Sym}(2 \times \mathfrak{b})$, $B \mapsto f_B$ zu konstruieren. Dies ist durch

$$f_B(i,x) := \begin{cases} (1,x) & \text{falls } i = 0, x \in B, \\ (0,x) & \text{falls } i = 1, x \in B, \\ (i,x) & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

getan. □

Satz 8.9 (König). *Seien $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ und $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ Familien von Kardinalzahlen mit $\mathfrak{a}_i < \mathfrak{b}_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt*

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i < \prod_{i\in I} \mathfrak{b}_i.$$

Beweis. Nach dem Auswahlaxiom existieren $y_i \in \mathfrak{b}_i \setminus \mathfrak{a}_i$ für alle $i \in I$. Dann ist die Abbildung $\bigcup_{i\in I}\{i\} \times \mathfrak{a}_i \to \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{b}_i$, $(j,x) \mapsto f$ mit

$$f(i) := \begin{cases} x & \text{falls } i = j, \\ y_i & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

injektiv. Dies zeigt $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \leq \prod_{i\in I} \mathfrak{b}_i$. Nehmen wir an es existiert eine Bijektion

$$\begin{aligned} \alpha : \bigcup_{i\in I}\{i\} \times \mathfrak{a}_i &\to \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{b}_i, \\ (i,x) &\mapsto \alpha_x. \end{aligned}$$

Für $i \in I$ ist $|\{\alpha_x(i) : x \in \mathfrak{a}_i\}| \leq \mathfrak{a}_i < \mathfrak{b}_i$. Daher existieren $f(i) \in \mathfrak{b}_i \setminus \{\alpha_x(i) : x \in \mathfrak{a}_i\}$ für alle $i \in I$. Dann wäre aber $f \in \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{b}_i$ nicht im Bild von α. □

Definition 8.10. Für eine Menge A und $\sigma \in \mathrm{Sym}(A)$ sei $\operatorname{supp}\sigma := \{a \in A : \sigma(a) \neq a\} \subseteq A$ der *Träger* von σ.

Satz 8.11. *Für jede unendliche Menge A gilt*

$$\begin{aligned} |\{B \subseteq A : |B| < \infty\}| &= |A|, \\ |\{\sigma \in \mathrm{Sym}(A) : |\operatorname{supp}\sigma| < \infty\}| &= |A|. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$|A| = |\{\{a\} : a \in A\}| \leq |\{B \subseteq A : |B| < \infty\}| \leq \Big|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n\Big| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |A|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A| = |\mathbb{N}| \cdot |A| = |A|.$$

Daraus folgt

$$|\{\sigma \in \mathrm{Sym}(A) : |\operatorname{supp}\sigma| < \infty\}| \leq \sum_{\substack{B,C\subseteq A,\\ |B|=|C|<\infty}} |\{B \to C\}| \leq \Big(\sum_{\substack{B\subseteq A,\\ |B|<\infty}} |B|^2\Big)^2 \leq (|A| \cdot |\mathbb{N}|^2)^2 = |A|. \quad \square$$

9 Konstruktion von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Bemerkung 9.1. Bisher können wir natürliche Zahlen nur addieren, multiplizieren und potenzieren. Um entsprechende Umkehroperationen zu definieren, müssen wir $\mathbb{N}$ durch größere Mengen ersetzen. Im Folgenden werden wir das Multiplikationssymbol $\cdot$ der Übersicht halber oft einsparen.

Definition 9.2.

(i) Offenbar definiert
$$(a,b) \sim (c,d) :\Longleftrightarrow a+d = b+c$$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Die Äquivalenzklassen $[a,b]$ bilden die Menge $\mathbb{Z}$ der *ganzen Zahlen*. Für $[a,b],[c,d]\in\mathbb{Z}$ definieren wir
$$\begin{aligned}
[a,b]+[c,d] &:= [a+c,b+d],\\
[a,b]-[c,d] &:= [a+d,b+c],\\
[a,b]\cdot[c,d] &:= [ac+bd,ad+bc],\\
[a,b]\le[c,d] &:\Leftrightarrow a+d\le b+c,
\end{aligned}$$
Man nennt $z\in\mathbb{Z}$ *gerade* (bzw. *ungerade*), falls (k)ein $w\in\mathbb{Z}$ mit $z=w+w$ existiert.

(ii) Offenbar definiert
$$(a,b)\sim(c,d) :\Longleftrightarrow ad = bc$$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Die Äquivalenzklassen $[a,b]$ bilden die Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen*. Für $[a,b],[c,d]\in\mathbb{Q}$ definieren wir
$$\begin{aligned}
[a,b]+[c,d] &:= [ad+bc,bd],\\
[a,b]-[c,d] &:= [ad-bc,bd],\\
[a,b]\cdot[c,d] &:= [ac,bd],\\
[a,b]:[c,d] &:= [ad,bc] \text{ falls } c\ne 0,\\
[a,b]\le[c,d] &:\Leftrightarrow ad\le bc.
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.3.

(i) Durch $n\mapsto[n,0]$ kann man $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ auffassen. Jedes weitere Element aus $\mathbb{Z}$ hat die Form $-n:=[0,n]$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Es gilt dann $\mathbb{Z}=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$ und $m-n=m+(-n)$ für $m,n\in\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $m-m=0$.

(ii) Durch $z\mapsto[z,1]$ kann man $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ einbetten. Allgemeiner schreibt man $[a,b]\in\mathbb{Q}$ in der Form a/b oder $\frac{a}{b}$. Es gilt dann $a:b=\frac{a}{b}$ für $a,b\in\mathbb{Z}$. Für $q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ ist außerdem $q:q=1$.

(iii) Man zeigt leicht, dass die angegebenen Rechenoperationen wohldefiniert sind und die entsprechenden Operationen auf $\mathbb{N}$ fortsetzen. Für $a\in\mathbb{Q}$ und $z\in\mathbb{Z}$ setzt man zusätzlich
$$a^z := \begin{cases}\prod_{x\in z} a & \text{falls } z\ge 0,\\ \prod_{x\in -z}\frac{1}{a} & \text{falls } z<0.\end{cases}$$
Es gelten dann die in Satz 8.4 formulierten Regeln auch in $\mathbb{Q}$ (sofern definiert). Die Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$ ist total und ebenfalls mit der Ordnung auf $\mathbb{N}$ kompatibel.

Satz 9.4 (Cantors erste Diagonalisierung)**.** *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $\mathbb{Z}$ eine Menge von Äquivalenzklassen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Durch Wahl eines Repräsentantensystems kann man $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auffassen. Nach Beispiel 7.5 ist $\mathbb{N} \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \mathbb{N}$. Analog kann man $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ auffassen und es folgt $\mathbb{N} \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \mathbb{N}$. □

Bemerkung 9.5.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \\ &n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

ist eine explizite Bijektion. Dennoch sind $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{Z}, \leq)$ nicht isomorph, denn $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element, aber $\mathbb{Z}$ nicht.

(ii) Die Calkin-Wilf-*Folge* $\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \ldots\}$ mit $q_0 := 0$ und

$$q_{n+1} := \frac{1}{2\lfloor q_n \rfloor + 1 - q_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ liefert eine explizite Bijektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ (ohne Beweis). Dabei ist $\lfloor q \rfloor$ die größte ganze Zahl z mit $z \leq q$. Dennoch ist $(\mathbb{Q}, \leq)$ weder zu $(\mathbb{N}, \leq)$ noch zu $(\mathbb{Z}, \leq)$ isomorph, denn ist $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus, so wäre

$$|\{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq 1\}| = |\{z \in \mathbb{Z} : f(0) \leq z \leq f(1)\}| < \infty.$$

Definition 9.6. Ein *Dedekind-Schnitt* ist eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{Q}$ mit den Eigenschaften:

- $\varnothing \neq D \neq \mathbb{Q}$,
- D besitzt kein größtes Element,
- $\forall d \in D : \mathbb{Q}^{<d} \subseteq D$.

Die Dedekind-Schnitte bilden die Menge $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ der *reellen Zahlen*. Durch $q \mapsto \mathbb{Q}^{<q}$ lassen sich die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ einbetten. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{R}$. Für Dedekind-Schnitte D und E definieren wir

$$\begin{aligned} D \leq E &:\Leftrightarrow D \subseteq E, \\ D + E &:= \{d + e : d \in D,\ e \in E\}, \\ -D &:= \{x \in \mathbb{Q} : \forall d \in D : x < -d\}, \\ D - E &:= D + (-E), \\ D \cdot E &:= \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q} : \exists d \in D, e \in E : d > 0, e > 0, x < de\} & \text{falls } D, E > 0, \\ -((-D) \cdot E) & \text{falls } D < 0, E > 0, \\ -(D \cdot (-E)) & \text{falls } D > 0, E < 0, \\ (-D) \cdot (-E) & \text{falls } D, E < 0, \\ 0 & \text{falls } D = 0 \vee E = 0, \end{cases} \\ \frac{1}{D} &:= \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q} : \exists d \in D : d > 0, x < \frac{1}{d}\} & \text{falls } D > 0, \\ -\frac{1}{-D} & \text{falls } D < 0, \end{cases} \\ D : E &:= D \cdot \frac{1}{E} \qquad \text{falls } E \neq 0. \end{aligned}$$

Man nennt $r \in \mathbb{R}$ *positiv* (bzw. *negativ*), falls $r > 0$ (bzw. $r < 0$).

Bemerkung 9.7.

(i) Die Operationen auf $\mathbb{R}$ setzen die Operationen auf $\mathbb{Q}$ fort und es gelten die in Satz 8.4 formulierten Rechenregeln (soweit definiert). Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist total und setzt die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ fort. Außerdem gilt

$$a \le b \Longrightarrow a + c \le b + c,$$
$$a, b \ge 0 \Longrightarrow ab \ge 0$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(ii) In der Analysis definiert man reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen.

Lemma 9.8. *Besitzt $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine obere Schranke, so ist*

$$\sup M := \bigcup_{r \in M} r \in \mathbb{R}$$

die kleinste obere Schranke von M. Man nennt $\sup M$ *das* Supremum *von M.*

Beweis. Ist $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von M, so ist s auch eine obere Schranke von $D := \bigcup_{r \in M} r \subseteq \mathbb{Q}$, d. h. $D \subseteq s$. Insbesondere ist $D \neq \mathbb{Q}$. Existiert ein größtes Element x in D, so wäre x auch ein größtes Element von einem $r \in M$. Dies widerspricht der Eigenschaften von Dedekind-Schnitten. Also besitzt D kein größtes Element. Für alle $d \in D$ ist $\mathbb{Q}^{<d} \subseteq D$. Daher ist $D \in \mathbb{R}$ die kleinste obere Schranke von M. □

Lemma 9.9. *Jede reelle Zahl ist das Supremum rationaler Zahlen, d. h. $\mathbb{Q}$ liegt* dicht *in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $q_n \in \mathbb{Q}$ maximal mit den Eigenschaften $n! \cdot q_n \in \mathbb{Z}$ und $q_n \in r$. Sicher ist dann $\sup\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \le r$. Sei $x \in r$ beliebig. Da r kein größtes Element besitzt, existiert ein $y \in r$ mit $x < y$. Wir schreiben $r = \frac{k}{m}$ mit $k, m \in \mathbb{Z}$ und $m > 0$. Die Maximalität von q_m zeigt $y \le q_m$ und $x \in \mathbb{Q}^{<q_m}$. Dies zeigt $r = \sup\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Satz 9.10 (Cantors zweite Diagonalisierung)**.** *Es gilt $|\mathbb{R}| = 2^{\mathbb{N}}$. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.*

Beweis. Wegen $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\mathbb{N}}$ genügt es eine injektive Abbildung $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ zu konstruieren. Für $f \in 2^{\mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $f_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{3^k} \in \mathbb{Q}$. Durch Induktion nach n zeigt man

$$f_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{3^{n+1} - 1}{2 \cdot 3^n} \le \frac{3}{2}.$$

Daher ist $\frac{3}{2}$ eine obere Schranke von $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ und nach Lemma 9.8 existiert

$$S_f := \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $g \in 2^{\mathbb{N}}$ mit $S_g = S_f$. Im Fall $f \neq g$ existiert ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \neq g(n)$. O. B. d. A. sei $f(n) = 0$ und $g(n) = 1$. Für alle $m \ge n$ gilt dann

$$f_m + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \le f_m + \frac{3^{m-n} + 1}{2 \cdot 3^m} = f_m + \frac{1}{3^n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{3^k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{g(k)}{3^k} \le g_m \le S_g = S_f.$$

Wegen $f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_n$ wäre dann auch $S_f - \frac{1}{2\cdot 3^n}$ eine obere Schranke von $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ im Widerspruch zur Minimalität von S_f. Also ist die Abbildung $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f \to S_f$ injektiv. □

Bemerkung 9.11.

(i) In der Analysis schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{3^n} := \lim_{k\to\infty} f_k := S_f$$

in der Situation des obigen Beweises. Die konstruierte Abbildung $f \mapsto S_f$ bildet nur in die Menge $\{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq \frac{3}{2}\}$ ab. Durch Skalierung ist daher bereits jedes *Intervall* $\{r \in \mathbb{R} : a \leq r \leq b\}$ mit $a < b$ überabzählbar.

(ii) Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man *irrational*. Wegen $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$ gibt es „mehr“ irrationale Zahlen als rationale. Wir konstruieren ein Beispiel.

Lemma 9.12. *Für alle $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $r, n > 0$ existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ und $s^n = r$.*

Beweis. Hat man s konstruiert, so gilt $1/s > 0$ und $(1/s)^n = 1/r$. Wir können also $r \geq 1$ annehmen, indem man notfalls r durch $1/r$ ersetzt. Für $r = 1$ wählt man $s = 1$. Sei also $r > 1$. Für jedes $t > r$ ist dann $t^n > r^n$. Daher existiert $s := \sup\{q \in \mathbb{Q} : q^n < r\}$. Nehmen wir zunächst $s^n < r$ an. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren nach Lemma 9.9 $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 < a < b$, $b - a < \frac{1}{k}$ und $b^n < r$. Es gilt dann

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}) < \frac{1}{k} n b^{n-1} \leq \frac{nr}{k}.$$

Daher gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $s^n < \frac{a^n}{b^n} < r$. Dann ist $s < \frac{a}{b}$ im Widerspruch zur Wahl von s. Im Fall $r < s^n$ findet man analog $a, b \in \mathbb{N}$ mit $r < \frac{a^n}{b^n} < s^n$. Dann wäre auch $\frac{a}{b} < s$ eine obere Schranke von $\{q \in \mathbb{Q} : q^n < r\}$. Also ist $s^n = r$.

Sei auch $t > 0$ mit $t^n = r$. Dann ist

$$(s-t)(s^{n-1} + s^{n-2}t + \ldots + st^{n-1} + t^{n-1}) = s^n - t^n = 0.$$

Wegen $s^{n-1} + s^{n-2}t + \ldots + st^{n-2} + t^{n-1} > 0$ folgt $s = t$. □

Bemerkung 9.13. In der Situation von Lemma 9.12 nennt man $\sqrt[n]{r} := s$ die n-te *Wurzel* von r. Für $n = 2$ nennt man $\sqrt{r} := \sqrt[2]{r}$ die *Quadratwurzel* von r.

Satz 9.14. *Die Quadratwurzel von 2 ist irrational.*

Beweis. Im Fall $w := \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $w = \frac{a}{b}$. Dabei können wir annehmen, dass $b \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich ist. Es folgt $2b^2 = a^2$. Insbesondere ist a^2 gerade. Wäre a ungerade, sagen wir $a = 2k + 1$, so wäre auch

$$a^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ungerade. Daher ist a gerade, sagen wir $a = 2c$. Dann ist $2b^2 = 4c^2$ und $b^2 = 2c^2$. Also ist auch b gerade, sagen wir $b = 2d$. Schließlich ist $w = \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$ im Widerspruch zur Wahl von b. □

Bemerkung 9.15. Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $r^2 \geq 0$. Daher existiert kein $r \in \mathbb{R}$ mit $r^2 = -1$. Wir erweitern daher $\mathbb{R}$, um auch Wurzeln negativer Zahlen ziehen zu können.

Definition 9.16. Wir definieren die Menge der *komplexen Zahlen* durch $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Komplexe Zahlen $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreibt man in der Form $a+b\mathrm{i}$. Dabei heißt a *Realteil* und b *Imaginärteil*. Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\begin{aligned}
(a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d),\\
(a,b) - (c,d) &:= (a-c, b-d),\\
(a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, ab + bc),\\
(a,b) : (c,d) &:= \Big(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{ab+bc}{c^2+d^2}\Big) \qquad \text{(falls } (c,d) \neq 0).
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.17.

(i) Durch $a \mapsto a + 0\mathrm{i}$ kann man $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ einbetten. Wie üblich ist dies mit den Rechenoperationen verträglich.

(ii) Mit Hilfe der *Exponentionalfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ und ihrer Umkehrfunktion, dem *natürlichen Logarithmus*, lässt sich a^b für beliebige komplexe Zahlen definieren.

(iii) Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ gibt es auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation, die mit den Rechenoperationen verträglich ist. Denn wegen $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$ kann weder $\mathrm{i} \geq 0$ noch $\mathrm{i} \leq 0$ gelten.

(iv) (Fundamentalsatz der Algebra) Sind $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ beliebig, so existiert stets ein (oder mehrere) $x \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

(ohne Beweis). Beispielsweise ist $\mathrm{i}^2 = -1$. Dies verallgemeinert Lemma 9.12.

(v) Sind $a_0, \ldots, a_n$ in (iv) rational, so nennt man x *algebraisch*. Die Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Die Elemente der überabzählbaren Menge $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ heißen *transzendente* Zahlen. Zum Beispiel ist die LIOUVILLE*sche Konstante*

$$\xi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{10^{n!}} \in \mathbb{R}$$

transzendent (ohne Beweis).

(vi) Neben den komplexen Zahlen gibt es mindestens zwei alternative Erweiterungen der reellen Zahlen: Die *hyperreellen Zahlen* und die *surrealen Zahlen*.

10 Endliche Mengen

Definition 10.1. Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ nennt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}$$

den *Binomialkoeffizienten* von n über k. Der folgende Satz zeigt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Satz 10.2. *Sei A eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Für alle $k \leq n$ gilt dann*

$$|\{B \subseteq A : |B| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Es gibt $|\mathrm{Sym}(B)| = k!$ Möglichkeiten die Elemente einer k-elementigen Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq A$ aufzulisten. Für die Wahl von b_1 gibt es n Möglichkeiten. Danach bleiben noch $|A \setminus \{b_1\}| = n-1$ Möglichkeiten für die Wahl von b_2 usw. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen ist daher $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. □

Bemerkung 10.3. (i) Für $0 < k \le n$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Induktiv folgt

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \ldots > \binom{n}{n} = 1,$$

wobei $\lceil n/2 \rceil$ das kleinste $z \in \mathbb{Z}$ mit $n/2 \le z$ bezeichnet (Pascalsches Dreieck).

(ii) In der Situation von Satz 10.2 gilt

$$2^n = 2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n} |\{B \subseteq A : |B| = k\}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dies ist ein Spezialfall der *binomischen Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (a, b \in \mathbb{C}),$$

die man mit vollständiger Induktion und (i) beweisen kann.

Satz 10.4 (Inklusions-Exklusions-Prinzip). *Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

Beweis. Wir zählen wie oft ein Element $a \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ auf der rechten Seite berücksichtigt wird. Dafür sei o. B. d. A. $a \in A_1 \cap \ldots \cap A_l$ und $a \notin A_i$ für $i > l$. Dann wird a genau dann gezählt, wenn $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, l\}$ gilt. Im k-ten Summanden wird a also $(-1)^{k+1}\binom{l}{k}$-mal gezählt nach Satz 10.2. Insgesamt wird a auf der rechten Seite genau

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{l}{k} = 1 - \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \overset{10.3}{=} 1 - (1-1)^l = 1$$

Mal gezählt. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 10.5 (Halls Heiratssatz). *Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge M mit $|I| < \infty$ oder $\forall i \in I : |M_i| < \infty$. Genau dann existieren paarweise verschiedene $x_i \in M_i$ für $i \in I$, wenn $|\bigcup_{i \in J} M_i| \ge |J|$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt.*

Beweis. Für $J \subseteq I$ schreiben wir $M_J := \bigcup_{i \in J} M_i$. Nehmen wir an, dass paarweise verschiedene $x_i \in M_i$ existieren (man nennt $(x_i)_{i \in I}$ ein *Vertretersystem*). Offenbar ist dann $|M_J| \ge |\{x_i : i \in J\}| = |J|$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$. Sei umgekehrt die Bedingung

$$|M_J| \ge |J| \qquad (J \subseteq I,\ |J| < \infty) \tag{10.1}$$

erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $|I| < \infty$.
Induktion nach $n := |I|$: Der Fall $n \le 1$ ist offensichtlich. Sei also $n > 1$ und o. B. d. A. $I = \{1, \ldots, n\}$. Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt *kritisch*, falls $1 \le |M_J| = |J| < n$ gilt.

Nehmen wir zunächst an, dass keine kritischen Teilmengen existieren. Wegen $|M_1| = |M_{\{1\}}| \ge 1$ existiert ein $x_1 \in M_1$. Für $i \in J := \{2, \ldots, n\}$ sei $N_i := M_i \setminus \{x_1\}$. Für jede Teilmenge $K \subseteq J$ gilt dann $|N_K| \ge |M_K| - 1 \ge |K|$, denn K ist nicht kritisch. Also erfüllt $(N_i)_{i \in J}$ Bedingung (10.1) und nach Induktion existiert ein Vertretersystem $(x_i)_{i \in J}$ von $(N_i)_{i \in J}$. Sicher ist dann $(x_i)_{i \in I}$ ein Vertretersystem für $(M_i)_{i \in I}$.

Nehmen wir schließlich an, dass eine kritische Teilmenge $J \subseteq I$ existiert. Dann gilt $1 \le m := |J| = |M_J| < n$. Nach Induktion besitzt $(M_i)_{i \in J}$ ein Vertretersystem $(x_i)_{i \in J}$. Für $i \in I \setminus J$ sei $N_i := M_i \setminus M_J$. Für jede Teilmenge $K \subseteq I \setminus J$ gilt dann

$$|N_K| = |M_K \setminus M_J| = |M_{K \cup J}| - |M_J| \ge |K \cup J| - m = |K| + |J| - m = |K|,$$

d. h. $(N_i)_{i \in I \setminus J}$ erfüllt (10.1). Nach Induktion existiert ein Vertretersystem $(x_i)_{i \in I \setminus J}$. Nach Konstruktion ist dann $(x_i)_{i \in I}$ ein Vertretersystem für $(M_i)_{i \in I}$.

Fall 2: $\forall i \in I : |M_i| < \infty$.
Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Familien $(N_i)_{i \in I}$ mit $N_i \subseteq M_i$ (für alle $i \in I$), für die (10.1) gilt. Wegen $(M_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$ ist $\mathcal{M}$ nichtleer und durch

$$(N_i)_{i \in I} \le (N'_i)_{i \in I} :\Longleftrightarrow \forall i \in I : N_i \subseteq N'_i$$

geordnet. Sei $\varnothing \ne \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge und $K_j := \bigcap_{(N_i)_{i \in I} \in \mathcal{N}} N_j$ für $j \in I$. Dann ist $(K_i)_{i \in I} \le (N_i)_{i \in I}$ für alle $(N_i)_{i \in I} \in \mathcal{N}$. Sei $J \subseteq I$ eine endliche Teilmenge und $j \in J$. Wegen $|M_j| < \infty$ existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$ mit

$$K_j = \bigcap_{(N_i)_{i \in I} \in \mathcal{N}_1} N_j$$

für alle $j \in J$. Da $\mathcal{N}$ total geordnet ist, besitzt $\mathcal{N}_1$ ein kleinstes Element $(N_i)_{i \in I}$. Offenbar ist dann $(K_j)_{j \in J} = (N_j)_{j \in J}$. Insbesondere ist $|K_J| = |N_J| \ge |J|$. Dies zeigt, dass $(K_i)_{i \in I}$ Bedingung (10.1) erfüllt und somit eine untere Schranke von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ ist. Nach Zorns Lemma existiert ein minimales Element $(N_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$. Da jedes Vertretersystem von $(N_i)_{i \in I}$ auch ein Vertretersystem von $(M_i)_{i \in I}$ ist, können wir $(M_i)_{i \in I}$ durch $(N_i)_{i \in I}$ ersetzen und $\mathcal{M} = \{(M_i)_{i \in I}\}$ annehmen.

Sei $x \in M_I$ und $N_i := M_i \setminus \{x\}$ für $i \in I$. Wegen $(N_i)_{i \in I} \notin \mathcal{M}$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $|M_J| - 1 \le |N_J| < |J| \le |M_J|$. Es folgt $|M_J| = |J|$ und $x \in M_J$. Wir definieren nun

$$N_i := \begin{cases} M_i & \text{falls } i \in J, \\ M_i \setminus M_J & \text{falls } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

Sei $K \subseteq I$ endlich. Dann gilt

$$\begin{aligned} |N_K| &= |N_{K \cap J} \cup N_{K \setminus J}| = |M_{K \cap J}| + |M_{K \setminus J} \setminus M_J| \\ &= |M_{K \cap J}| + |M_{K \cup J}| - |M_J| \ge |K \cap J| + |K \cup J| - |J| = |K|. \end{aligned}$$

Dies zeigt $(N_i)_{i\in I} \in \mathcal{M} = \{(M_i)_{i\in I}\}$ und $M_i \cap M_J = \varnothing$ für $i \in I \setminus J$. Es folgt $M_{I\setminus J} \cap M_J = \varnothing$. Nach Fall 1 existieren paarweise verschiedene $x_i \in M_i$ für $i \in J$. Setzt man nun

$$N_i := \begin{cases} \{x_i\} & \text{falls } i \in J, \\ M_i & \text{falls } i \in I \setminus J, \end{cases}$$

so erfüllt $(N_i)_{i\in I}$ wieder (10.1). Also gilt $M_i = \{x_i\}$ für $i \in J$. Da x beliebig gewählt war, gilt sogar $|M_i| = 1$ für alle $i \in I$. Offenbar sind die M_i auch paarweise disjunkt und die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 10.6. Satz 10.5 gilt nicht für $I = \mathbb{N}$, wenn nicht alle M_i endlich sind: Wähle $M_0 := \mathbb{N}$ und $M_i := \{i-1\}$ für $i \geq 1$.

Definition 10.7. Jede total geordnete Teilmenge K einer endlichen geordneten Menge M hat die Form $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Man nennt K daher auch *Kette*. Eine Kette von M heißt *maximal*, wenn sie in keiner größeren Kette von M enthalten ist. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *Antikette* von M, falls $x \leq y \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$ gilt.

Satz 10.8 (Sperner). *Sei M eine n-elementige Menge und A eine größtmögliche Antikette von $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Dann gilt*

$$A = \{N \subseteq M : |N| = \lfloor n/2 \rfloor\} \text{ oder } A = \{N \subseteq M : |N| = \lceil n/2 \rceil\}.$$

Insbesondere ist $|A| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Beweis (Lubell). Offenbar hat jede maximale Kette in $\mathcal{P}(M)$ die Form $M_0 \subset \ldots \subset M_n$ mit $|M_k| = k$ für $k = 0, \ldots, n$. Es gibt n Möglichkeiten für M_1. Ist M_1 fest, so verbleiben noch $n-1$ Möglichkeiten für M_2 usw. Also gibt es genau $n!$ maximale Ketten in $\mathcal{P}(M)$. Sei nun $N \subseteq M$ fest mit $|N| = k$. Dann gibt es genau $k!(n-k)!$ maximale Ketten, die N enthalten (für M_1 gibt es k Möglichkeiten, für M_2 gibt es $k-1$ Möglichkeiten, ..., für $M_k = N$ gibt es eine Möglichkeit, für M_{k+1} gibt es $n-k$ Möglichkeiten usw.). Für $x \in A$ sei K_x die Menge aller maximalen Ketten, die x enthalten. Enthält eine (maximale) Kette sowohl x als auch y, so gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Daher sind die Mengen K_x mit $x \in A$ paarweise disjunkt. Dies zeigt

$$\sum_{x\in A} |x|!(n-|x|)! = \sum_{x\in A} |K_x| = \Big|\bigcup_{x\in A} K_x\Big| \leq n!. \tag{10.2}$$

Division durch $n!$ liefert

$$|A| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \overset{10.3}{\leq} \sum_{x\in A} \frac{1}{\binom{n}{|x|}} \leq 1.$$

Also ist $|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Umgekehrt ist $\{N \subseteq M : |N| = \lfloor n/2 \rfloor\}$ sicher eine Antikette mit $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Elementen (Satz 10.2). Es folgt $|A| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ und $\binom{n}{|x|} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ für alle $x \in A$. Daher besteht A nur aus Teilmengen $N \subseteq M$ mit $\lfloor n/2 \rfloor \leq |N| \lceil n/2 \rceil$. Ist n gerade, so sind wir fertig.

Sei nun $n = 2m+1$ ungerade. Aus (10.2) folgt $\sum_{x\in A} |K_x| = n!$, das heißt, alle maximalen Ketten enthalten (genau) ein Element aus A. Nehmen wir nun indirekt an, dass $S, T \subseteq M$ mit $|S| = |T| = m+1$, $S \in A$ und $T \notin A$ existieren. Bei geeigneter Nummerierung gilt $S = \{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ und $T = \{x_i, \ldots, x_{m+i}\}$. Wegen $T \notin A$ existiert ein $j \geq 1$ mit $S' := \{x_j, \ldots, x_{m+j}\} \in A$ und $T' := \{x_{j+1}, \ldots, x_{m+j+1}\} \notin A$. Es gilt $|S' \cap T'| = m$. Wegen $S' \cap T' \subseteq S' \in A$ ist $S' \cap T' \notin A$. Sicher existiert eine Kette, die $S' \cap T'$ und T' enthält. Wegen $A \subseteq \{N \subseteq M : |N| \in \{m, m+1\}\}$ müsste eine dieser Menge in A liegen. Dies widerspricht aber $T' \notin A$. $\square$

Satz 10.9 (Mirsky)**.** *Sei M eine endliche geordnete Menge und m die größte Mächtigkeit einer Kette in M. Dann ist M eine Vereinigung von m Antiketten, aber nicht die Vereinigung von weniger Antiketten.*

Beweis. Für $x \in M$ sei $f(x) \geq 1$ die größte Mächtigkeit einer Kette, die bei x endet. Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Im Fall $x < y$ könnte man die jede Kette, die bei x endet um y verlängern. Dann wäre aber $f(y) > f(x)$. Daher ist $x \nleq y \nleq x$. Also sind die Urbilder $A_n := f^{-1}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ Antiketten. Nach Voraussetzung ist $f(x) \leq m$ für alle $x \in M$. Dies zeigt $M = A_1 \cup \ldots \cup A_m$.

Sei umgekehrt $M = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ für Antiketten $A_1, \ldots, A_k$. Sei $K \subseteq M$ eine Kette mit $|K| = m$. Dann gilt $|K \cap A_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, k$. Dies zeigt $k \geq |K| = m$. □

Satz 10.10 (Dilworth)**.** *Sei M eine endliche geordnete Menge und m die größte Mächtigkeit einer Antikette in M. Dann ist M eine Vereinigung von m Ketten, aber nicht die Vereinigung von weniger Ketten.*

Beweis (Galvin)*.* Ist M die Vereinigung der Ketten $K_1, \ldots, K_s$, so gilt $|A \cap K_i| \leq 1$ für jede Antikette A. Dies zeigt $s \geq m$. Für die umgekehrte Ungleichung argumentieren wir durch Induktion nach $|M|$. Für $M = \varnothing$ ist die Behauptung klar. Sei also $M \neq \varnothing$ und sei $x \in M$ ein maximales Element. Besitzt $M' := M \setminus \{x\}$ keine Antikette mit m Elementen, so ist M' nach Induktion eine Vereinigung von $m - 1$ Ketten. Sicher ist dann M eine Vereinigung von m Ketten. Sei nun $A \subseteq M'$ eine Antikette mit $|A| = m$. Nach Induktion existieren o. B. d. A. disjunkte Ketten $K_1, \ldots, K_m$ mit $M' = K_1 \cup \ldots \cup K_m$. Dabei gilt $|A \cap K_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei

$$x_i := \max \bigcup_{\substack{A \subseteq M' \text{ Antikette} \\ |A| = m}} K_i \cap A$$

für $i = 1, \ldots, m$. Angenommen es gilt $x_i \leq x_j$. Sei $A \subseteq M'$ eine Antikette mit $x_j \in A$ und $|A| = m$. Sei $x_i' \in A \cap K_i$. Dann gilt $x_i' \leq x_i \leq x_j$. Wegen $x_i', x_j \in A$ folgt $x_i' = x_i = x_j$ und $i = j$, da $K_i \cap K_j = \varnothing$. Daher ist $A := \{x_1, \ldots, x_m\}$ eine m-elementige Antikette von M'. Nach Voraussetzung ist $A \cup \{x\}$ keine Antikette. Da x maximal in M ist, gilt $x_i < x$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$. Also ist $K_i' := K_i \cup \{x\}$ eine Kette und M ist die Vereinigung der Ketten $K_1, \ldots, K_{i-1}, K_i', K_{i+1}, \ldots, K_m$. □