Square-1

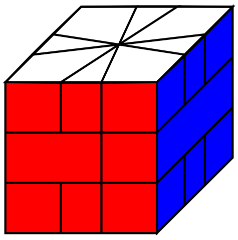
Wie man Weihnachten 2020 verbringt

Benjamin Sambale

7. Januar 2021

1 Jenseits des Zauberwürfels

Im Rahmen meiner Gruppentheorie-Vorlesung beschäftigte ich mich zum wiederholten Male mit Rubiks Zauberwürfel. Auch wenn immer wieder neue mathematische Erkenntnisse, wie die NP-Vollständigkeit von Gottes-Algorithmus für den $n \times n \times n$-Würfel [2], bewiesen werden, ist doch das meiste bereits zu oft gesagt und geschrieben worden. Da ich zur großen Mehrheit derer zähle, die den Zauberwürfel nicht ohne fremde Hilfe lösen konnten, entstand der Wunsch ein anderes, weniger bekanntes Permutationspuzzle selbstständig zu analysieren und zu lösen. Die $n \times n \times n$-Würfel mit $n = 2, 4, 5, \ldots$ (namentlich *Pocket Cube*, *Rubik's Revenge*, *Professor's cube*, ...) sind bezüglich der Mechanik dem Original zu ähnlich (abgesehen davon, dass ich die Lösung bereits kannte). Der Tetraeder *Pyraminx* ist so einfach, dass man ihn mit Glück lösen kann. Meine Wahl fiel daher auf das 1990 von Hršel und Kopský erfundene *Square-1* (im Englischen gibt es die an „Mensch ärgere dich nicht“ erinnernde Redewendung „back to square one“). Im Ausgangszustand ähnelt Square-1 in seiner Würfelform mit verschieden gefärbten Seiten dem Zauberwürfel:



Ober- und Unterseite sind in je vier Ecksteine und vier Kantensteine unterteilt. Im Gegensatz zum Zauberwürfel gibt es keine Seitenmittelsteine (diese sind dort ohnehin irrelevant). Stattdessen bilden die Ecksteine 60°-Sektoren, während die Kantensteine 30°-Sektoren bilden. Die mittlere Ebene ist nur einmal asymmetrisch unterteilt, wodurch sich jeder Zeit Ober- und Unterseite identifizieren lassen (beim Zauberwürfel gelingt dies durch die Seitenmittelflächen, während beim Pocket Cube oder Rubik's Revenge keine solche Identifizierung möglich ist). Die drei Ebenen lassen sich frei und unabhängig drehen. Zusätzlich gibt es die Möglichkeit an einer festen vertikalen Ebene um 180° zu drehen (andere Drehwinkel zwischen 0° und 360° sind zwar zulässig, aber führen unmittelbar in eine Sackgasse). Nach einer solchen Drehung werden einige Eck- und Kantensteine der Oberseite mit der Unterseite ausgetauscht. Dabei verliert das Puzzle seine Würfelgestalt (die mittlere Ebene wird sechseckig).

Im Folgenden möchte ich den kurzweiligen Prozess beschreiben, der mich an Weihnachten 2020 zur Lösung des Square-1 geführt hat. Anstatt der Lektüre sei dem Leser empfohlen sich an diesem oder einem ähnlichen Puzzle selbst zu probieren.

2 Erste Schritte

Ab jetzt halten wir den Square-1 an der linken Hälfte der mittleren Ebene fest. Dies ist offensichtlich keine wesentliche Einschränkung. Anfangs habe ich nur einige vermeintlich übersichtliche Züge gewagt, um das Puzzle jederzeit rekonstruieren zu können. Dazu eignen sich Kombinationen aus 180°-Drehungen. Zum besseren Verständnis führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} u &= 30^\circ\text{-Drehung der Oberseite gegen den Uhrzeigersinn,} \\ d &= 30^\circ\text{-Drehung der Unterseite gegen den Uhrzeigersinn mit Sicht von oben,} \\ s &= 180^\circ\text{-Drehung an der verikalen Ebene.} \end{aligned}$$

Durch Probieren entdeckt man:

$$\begin{aligned} su^6d^6s &= \text{Ober- und Unterseite werden vollständig getauscht,} \\ su^6su^6su^6 &= \text{Mittlere Ebene verändert Form.} \end{aligned}$$

Die Drehungen sollen dabei von links nach rechts ausgeführt werden, wobei die Reihenfolge in diesem speziellen Fall noch keine Rolle spielt. Da wir nun die beiden Zustände der mittleren Ebene ineinander überführen können ohne den Rest zu verändern, werden wir diese Ebene zukünftig vernachlässigen.

Als Nächstes konzentrieren wir uns auf Manöver, die die Würfelgestalt erhalten. Dafür ist es nützlich die Unterseite um 30° zu versetzen, d. h. wir führen d aus. Dieser Zustand bleibt nämlich unter s, u^{3k} und d^{3k} mit $k \in \mathbb{Z}$ erhalten. Den Effekt dieser Züge beschreiben wir durch Permutationen, indem wir die insgesamt 16 Eck- und Kantensteine nummerieren. Die Steine der Oberseite seien $1, \dots, 8$ und die der Unterseite $9, \dots, 16$ jeweils gegen den Uhrzeigersinn (Blick von oben) nummeriert. Die Ecksteine bilden die ungeraden Ziffern. Direkt unter Ecke 1 sei Kante 10 wegen des 30°-Versatzes. In Zyklenschreibweise gilt nun

$$s = (1,13)(2,12)(3,11)(4,10), \qquad u^3 = (1,3,5,7)(2,4,6,8), \qquad d^3 = (9,11,13,15)(10,12,14,16).$$

Damit lässt sich bereits erheblicher „Schaden“ anrichten. Bei der Suche nach Zugfolgen mit überschaubarem Effekt empfiehlt es sich *Kommutatoren* zu betrachten, also Produkte der Form $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Oft kürzen sich dabei unerwünschte Effekte heraus. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} [s,u^3] = su^3su^{-3} &= (1,7,13,11,3)(2,8,12,10,4), \\ A := [s,u^3]^2s &= (3,7)(4,8)(10,12)(11,13) \end{aligned}$$

(man kann diese Rechnungen leicht im Computeralgebrasystem GAP [3] verifizieren). Das Manöver A vertauscht auf der Ober- und Unterseite je ein Eckpaar und ein Kantenpaar. Insbesondere wird nicht mehr zwischen den Ebenen getauscht. Möchte man nur auf einer Seite Veränderungen, sagen wir auf der Unterseite, so kann man den Kommutator mit d^3 bilden:

$$B := [A, d^3] = (9,11,13)(10,12,16)$$

(bei der praktischen Durchführung hilft es $A = A^{-1}$ zu wissen). In der Tat bleibt nun die Oberseite invariant, während auf der Unterseite je drei Ecken und drei Kanten zyklisch permutiert werden. Die bisher benutzten Züge s, u^3 und d^3 können eine Ecke der Oberseite nicht von ihrer rechten Nachbarkante trennen. Es ist daher Zeit Neues zu wagen. Die Kombination $ud^{-1}sdu^{-1}$ erhält ebenfalls die Würfelgestalt. Günstiger ist jedoch der Kommutator

$$t := [ud^{-1}, s] = (4,10)(8,14).$$

Dies vertauscht ein gegenüberliegendes Kantenpaar von Ober- zu Unterseite. Durch Kommutatorbildung kann man Ober- und Unterseite trennen

$$C := [t, d^6] = (4,8)(10,14)$$

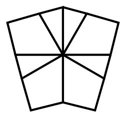
und schließlich nur „unten“ arbeiten

$$D := [B, C] = (10,14,16).$$

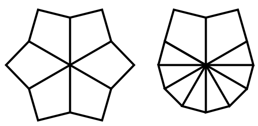
3 Ein Algorithmus

Wir verdrehen das Puzzle nun endgültig durch beliebige Anwendung von s, u und d, sodass die Würfelgestalt verloren geht. Man beachte, dass nicht alle Kombinationen dieser drei Erzeuger möglich sind (bereits $u^{-1}s$ ist nicht realisierbar). Im Gegensatz zum Zauberwürfel bilden die Zustände des Square-1 also keine Permutationsgruppe in der naheliegenden Weise. Eine genaue Analyse der Zustandsmenge erfolgt im letzten Abschnitt. Wir lösen das Puzzle durch folgende Schritte:

Schritt 1: Sortieren von Ecken und Kanten Es bereitet erhebliche Schwierigkeit das Puzzle zurück auf Würfelgestalt zu bekommen. Dies liegt vermutlich daran, dass man die Würfelform nur über genau eine andere Form erreicht. Bei dieser haben Ober- und Unterseite die Form

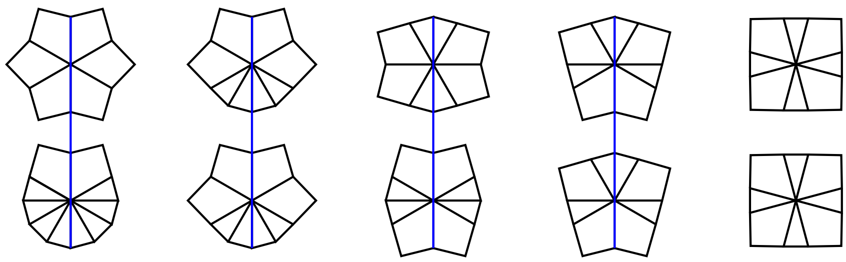


(ohne Berücksichtigung von Farben). Man muss also zwangsläufig diesen Zustand anstreben. Dies geht nur von zwei weiteren Formen (welchen?). Nach einigen Probieren finde ich es leichter einen sortieren Zustand anzustreben, der von vielen weiteren Zuständen erreichbar ist. Es bereitet keinerlei Probleme sechs Ecken (und folglich keine Kante) auf der Oberseite zu einem Stern zu versammeln. Für die Unterseite bleiben noch fünf mögliche Formen, die sich durch die Anzahl der Kanten zwischen den zwei verbleibenden Ecksteinen unterscheiden. Allein mittels s- und d-Zügen lässt sich zwischen diesen fünf Formen wechseln. Man erreicht somit:



(Ober/Unterseite)

Schritt 2: Herstellen der Würfelform Eine leicht zu merkende Folge symmetrischer Züge verteilt die Kantensteine solange gleichmäßig bis die Würfelform aus der Sterngestalt entsteht:



Die blaue Linie gibt den s-Zug an.

Schritt 3: Anordnung der Ecksteine Mit den im letzten Abschnitt eingeführten Zugfolgen s, u^3 und d^3 lassen sich die vier Ecksteine der Oberseite mit Leichtigkeit weiß färben ohne die Würfelgestalt zu zerstören. Jede Permutation der unteren Ecken $9, 11, 13, 15$ lässt sich als Produkt der Zyklen $(9, 11, 13, 15)$ und $(9, 11, 13)$ schreiben. Mit den Manövern d^3 und B lassen sich daher die Ecksteine der Unterseite korrekt anordnen ohne die Oberseite zu verändern. Analog kann man auch die Ecksteine der Oberseite in die richtige Position bringen (wir wissen bereits, dass man Ober- und Unterseite komplett tauschen kann).

Schritt 4: Anordnung der Kantensteine Wir benutzen ab jetzt nur noch Zugfolgen, die die Ecksteine festlassen. Mit der Sequenz t können wir oben und unten je zwei weißen Kantensteine produzieren. Nach geeigneter Anwendung von D, liegen die Kanten der Unterseite gegenüber. Wie immer erreicht man das auch auf der Oberseite. Durch nochmalige Benutzung von t färbt man alle Kanten der Oberseite weiß. Mit den Zügen C und D bringt man die Kanten der Unterseite in die richtige Anordnung. Leider werden bei Anwendung von C Kanten der Oberseite permutiert. Es entstehen daher zwei Fällen: Bilden die oberen Kantensteine eine gerade Permutation, so lassen sie sich mit dem Analogon von D lösen. Anderenfalls können wir das Puzzle mit den bisherigen Methoden gar nicht lösen, denn u^3, d^3, s, t sind allesamt gerade Permutationen (auf 16 Ziffern). Wir benötigen in diesem Fall den nächsten Schritt.

Schritt 5: Lösen des Paritätproblems Ich habe mich lange gefragt, ob man ungerade Permutationen überhaupt als Zustände erreichen kann. Beim Nachdenken über die Sterngestalt aus Schritt 1 wurde mir klar, dass es durchaus möglich ist mit s je drei Ecksteine oben und unten zu tauschen. Dies realisiert ein Produkt von drei Transpositionen; also eine ungerade Permutation! Das war vielleicht das schönste Aha-Erlebnis während der „Arbeit“ an dem Puzzle. Diese Erkenntnis zeigt gleichzeitig, wie man mit wenig Aufwand vom ungeraden in den gerade Zustand wechseln kann: Wir benötigen eine Folge f, die fast den Sternzustand erreicht, führen dann einmalig s aus und anschließend f^{-1}. Von der Würfelgestalt funktioniert zum Beispiel folgende Sequenz aus Schritt 2:

$$f = su^3d^{-3}sud^{-2}su^2d^2.$$

Anschließend sind einige Ecksteine vertauscht, sodass man wieder bei Schritt 3 einsteigen muss. Man wird nun aber garantiert mit Schritt 4 fertig.

Selbstverständlich ist die beschriebene Lösung in keiner Weise optimal, dafür aber leicht nachvollziehbar.

4 Eine Analyse

Spätestens nach Schritt 5 des obigen Algorithmus ist klar, dass man alle $(8!)^2 = 1.625.702.400$ Permutationen der Eck- und Kantensteine durch legale Verdrehungen des Würfels realisieren kann. Damit sind allerdings nur Zustände in Würfelgestalt gezählt. Für alle andere Zustände muss man zuerst eine „Normalform“ definieren. Wir vereinbaren, dass Ober- und Unterseite so ausgerichtet sein sollen, dass auf der (roten) Vorderseite ein senkrechter Strich rechts der Mitte zu erkennen ist (das bedeutet noch nicht, dass der Zug s möglich ist). Wir zählen nun die verschiedenen Formen ohne Berücksichtigung von Farben. Ober- und Unterseite enthalten jeweils zwischen 2 und 6 Ecksteine. Enthält die Oberseite e Ecken, so besteht sie insgesamt aus $12-e$ Steinen. Es gibt dann $\binom{12-e}{e}$ Möglichkeiten die Position dieser Ecken zu wählen. Auf der Unterseite kommen $\binom{4+e}{8-e}$ mögliche Anordnungen hinzu. Theoretisch ergeben sich somit

$$\sum_{e=2}^{6} \binom{12-e}{e}\binom{4+e}{8-e} = 8518$$

Formen. Unterscheidet man zwischen den beiden Zuständen der mittleren Ebene, so besitzt das Puzzle insgesamt höchstens

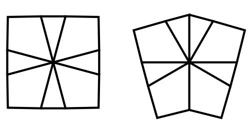
$$(8!)^2 \cdot 2 \cdot 8518 = 27.695.466.086.400 \tag{4.1}$$

Zustände. Allerdings ist keineswegs klar, ob wirklich alle Formen angenommen werden können. Als Beitrag des Computeralgebra-Rundbriefs sei es erlaubt den Computer zu befragen. Da 8518 eine überschaubare Zahl ist, genügt ein naiver Algorithmus. Wir modellieren die Formen von Ober- und Unterseite durch zwei Vektoren v_u und v_d mit Einträgen 1 (für eine Kante) und 2 (für eine Ecke). Drehungen von Ober- und Unterseite entsprechen Shifts dieser Vektoren, wobei zu beachten ist, dass die Länge der Vektoren im Laufe des Algorithmus variiert. Im Ausgangszustand gilt

$$v_u = v_d = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$$

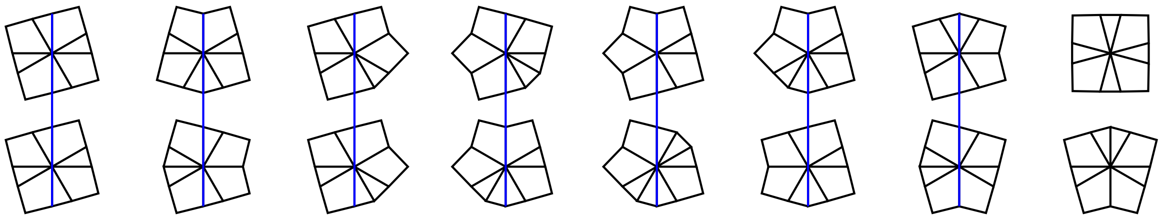
und wir setzen $L_1 := \{(v_u, v_d)\}$ und $M := \varnothing$. Induktiv sei L_i für ein $i \geq 1$ bereits definiert. Für jede Form $(v_u, v_d) \in L_i$ berechnen wir alle möglichen Shifts und fügen diese der Menge M hinzu. Für jeden Shift prüfen wir, ob die ersten $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ Einträge von v_u und v_d in der Summe 6 ergeben. Ist dies der Fall, so lässt sich s durchführen. Dabei werden die entsprechenden Teile von v_u und v_d vertauscht (man kann vernachlässigen, dass s die Reihenfolge umkehrt). Die neu konstruierten Paare (v'_u, v'_d) speichern wir in L_{i+1} ab, falls sie noch nicht in M liegen. Man erhöhe nun i und wiederhole so lange, bis L_i leer ist. In der Tat enthält M nach acht Durchläufen alle 8518 Formen. Damit ist (4.1) die korrekte Anzahl an Zuständen des Square-1. Der große Primfaktor 4259 von 8518 bestätigt erneut, dass sich die volle Zustandsmenge nicht zweckmäßig als Permutationsgruppe beschreiben lässt.

Interessanterweise gibt es nur 24 Formen, die erst nach acht Durchläufen des Algorithmus entstehen. Sie unterscheiden sich nur durch Shifts und Vertauschen von Ober- und Unterseite. Ein Repräsentant ist



(Ober/Unterseite).

Man erhält ihn durch die folgenden sieben s-Anwendungen:



In Analogie zu *God's Number* für den Zauberwürfel kann man fragen, wie viele Züge nötig sind, um einen solchen Zustand zu lösen. Ein *Zug* sei hierbei eine Anwendung von s oder einer Potenz von u oder d. Da nur eine gerade Anzahl an s-Zügen die mittlere Ebene intakt lässt, muss es Zustände geben, deren Lösung mindestens acht s-Züge benötigen. Da zwischen zwei s-Zügen ein u- oder d-Zug erfolgen muss, erfordern manche Zustände mindestens 15 Züge. Tatsächlich reichen selbst 15 Züge nicht immer, denn es gibt nur 14^7 Sequenzen der Form $sx_1^{i_1}sx_2^{i_2}\dots sx_7^{i_7}s$ mit $x_1,\dots,x_7 \in \{u,d\}$, aber $24\cdot(8!)^2 > 14^7$ „kritische" Zustände. Ein 16. Zug lässt sich an neun Positionen sinnvoll einfügen. Damit kommt man auf höchstens

$$14^7 + 2\cdot 14^8 + 7\cdot 14^6\cdot 63 > 24\cdot(8!)^2$$

Möglichkeiten, was immer noch zu wenig ist. Noch einmal klappt der Trick allerdings nicht. Wir können somit festhalten, dass God's Number für den Square-1 mindestens 17 ist. Shuang Chen [1] hat 2017 (offenbar auch über Weihnachten) per brute force den genauen Wert von God's Number bestimmt: 31 (zumindest wenn man sich auf Zustände beschränkt, bei denen s anwendbar ist). Leider wurde dieses Ergebnis in keiner Zeitschrift publiziert.

Literatur

[1] S. Chen, *Square one can be solved in 31 moves in face turn metric*, `https://www.speedsolving.com/threads/square-one-can-be-solved-in-31-moves-in-face-turn-metric.67363`.

[2] E. D. Demaine, S. Eisenstat and M. Rudoy, *Solving the Rubik's cube optimally is NP-complete*, in: 35th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Art. No. 24, 13, LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform., Vol. 96, Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2018.

[3] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.0*; 2020, (`http://www.gap-system.org`).