

ULRICH DERENTHAL

DARSTELLUNGEN UND
PRINZIPAL-HOMOGENE RÄUME

DIPLOMARBEIT

Darstellungen und prinzipal-homogene Räume

Diplomarbeit

vorgelegt von

Ulrich Derenthal

aus Brakel

angefertigt am

Mathematischen Institut der
Georg-August-Universität Göttingen

2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Grundlagen	1
1.1 Bezeichnungen	1
1.2 Lineare algebraische Gruppen und Lie-Algebren	1
1.3 Gruppenoperationen	1
1.4 Gruppenkohomologie	2
1.4.1 Nicht-abelsche Kohomologie	2
1.4.2 Galois-Kohomologie	3
2 Lie-Algebren	5
2.1 Darstellungen von Lie-Algebren	5
2.2 Beispiele	7
2.2.1 Darstellungen	9
3 Lineare algebraische Gruppen	13
3.1 Höchstgewichtsdarstellungen	13
3.1.1 Irreduzible Darstellungen unter Körpererweiterungen	17
3.1.2 Kohomologie der Geradenbündel auf \mathbb{P}_K^1	18
3.2 Zerlegung der regulären Darstellung	18
3.3 Darstellungen in Charakteristik $p > 0$	19
3.4 Beispiele	21
3.4.1 Kohomologie von $\xi_{-\chi}$ für \mathbf{PGL}_2	22
3.4.2 Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 in Charakteristik 0	24
3.4.3 Darstellungen von \mathbf{PGL}_n	27
3.4.4 Darstellungen von \mathbf{GL}_2	28
3.4.5 Darstellungen von \mathbf{SL}_2	29
3.4.6 Darstellungen von \mathbf{SL}_2 in Charakteristik $p > 0$	30
3.4.7 Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 in Charakteristik $p > 0$	30
3.4.8 \mathbf{PGL}_2 und \mathbf{PSL}_2	32
4 Prinzipal-homogene Räume	35
4.1 Galois-Abstieg für G -Räume	36
4.2 Kohomologische Beschreibung	38
4.3 Operationen auf dem Koordinatenring	40
4.4 Beispiele	43

4.4.1	Prinzipal-homogene Räume zu \mathbf{PGL}_2	43
4.4.2	Unterschiede in den Koordinatenringen im Fall \mathbf{PGL}_2	46
5	Formen	49
5.1	\mathbf{PGL}_2 als Automorphismengruppe und Galoisabstieg	50
5.2	Übergang zwischen Formen	50
5.2.1	\mathbf{SL}_2 und \mathbb{M}_2	51
5.2.2	Darstellbarkeit der Funktoren Isom und Aut	51
5.2.3	\mathbf{PGL}_2 als algebraische Gruppe und homogener Raum	54
5.2.4	Formen von \mathbb{P}^1	55
5.3	Quaternionenalgebren und \mathbf{PGL}_2	56
5.3.1	Lokale Körper	56
5.3.2	Zahlkörper	57
	Literaturverzeichnis	59
	Symbolverzeichnis	61
	Danksagung	63

Einleitung

Die Ausgangsfragestellung für diese Arbeit ist Folgendes: Betrachte eine reduktive lineare algebraische Gruppe G , die über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0 definiert ist. Falls G einfach transitiv auf einer Varietät X operiert, heißt X prinzipal-homogener Raum zu G . Offensichtlich ist G ein prinzipal-homogener Raum zu sich selbst, und falls X einen über K definierten Punkt hat, ist X isomorph zu G .

Es kann aber auch passieren, dass X keine K -rationalen Punkte hat und erst über einem Erweiterungskörper L von K zu G isomorph wird. Gleiches gilt dann für die Koordinatenringe: $K[X]$ ist nicht isomorph zu $K[G]$, aber $L[X]$ und $L[G]$ sind isomorph. Die Schemata X und G anhand ihrer K - oder L -rationalen Punkte zu vergleichen, ist nicht besonders ergiebig, da $X(K)$ leer und $X(L)$ gleich $G(L)$ ist. Um mehr über die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen X und G zu erfahren, bietet es sich also an, $K[X]$ und $K[G]$ zu betrachten.

Aus den Operationen von G auf X bzw. auf sich selbst erhält man Darstellungen von G auf den Koordinatenringen. Aufgabe dieser Arbeit ist zu untersuchen, ob sich die Unterschiede zwischen $K[X]$ und $K[G]$ in ihren Zerlegungen in irreduzible Darstellungen zeigen. Das Ergebnis ist, dass diese Zerlegungen gleich sind, falls G eine reduktive Gruppe mit einem über K definierten und zerfallenden maximalen Torus ist (Satz 4.18). In Charakteristik 0 ist diese Zerlegung besonders übersichtlich: Jede irreduzible Darstellung kommt mit der Vielfachheit ihrer Dimension vor (Satz 3.20). Diese Ergebnisse waren in keiner der mir bekannten Quellen zu finden.

Als Beispiel wird meistens \mathbf{PGL}_2 verwendet, weil diese Gruppe der einfachste interessante Fall ist: die einzige andere halbeinfache lineare algebraische Gruppe von Rang 1 ist \mathbf{SL}_2 , aber zu dieser gibt es keine nicht-trivialen prinzipal-homogenen Räume.

Nun zum Aufbau dieser Arbeit:

- Im ersten Kapitel werden einige Grundlagen zusammengefasst. Da die K -Isomorphieklassen von obigen prinzipal-homogenen Räumen, die über dem Erweiterungskörper L zu G isomorph werden, durch $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), G(L))$ klassifiziert werden, wird insbesondere die Galois-Kohomologie nicht notwendig abelscher Gruppen beschrieben.
- Die Darstellungstheorie linearer algebraischer Gruppen hängt eng mit der entsprechenden Theorie für Lie-Algebren zusammen, mit der sich das zweite Kapitel befasst. Insbesondere am Beispiel der Lie-Algebra \mathfrak{pgl}_2 sollen dort einige Begriffe erläutert werden.
- Im dritten Kapitel geht es um Darstellungen von linearen algebraischen Gruppen. Neben einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der allgemeinen Theorie

und dem Beweis von Aussagen über die Zerlegung der regulären Darstellung (Satz 3.20) und über das Verhalten von Darstellungen unter Körpererweiterungen (Satz 3.15) werden verschiedene Phänomene anhand von einigen Beispielen illustriert, unter anderem auch für Charakteristik $p > 0$

- Um die oben erwähnten prinzipal-homogenen Räume geht es in Kapitel 4. Insbesondere wird der Galois-Abstieg (Satz 4.4) und der Zusammenhang zur Gruppenkohomologie (Satz 4.7) beschrieben. Außerdem geht es um die Operation von G und der Galoisgruppe $\text{Gal}(L/K)$ auf dem Koordinatenring. Wieder werden die Ergebnisse am Beispiel \mathbf{PGL}_2 verdeutlicht.
- Dass \mathbf{PGL}_2 die Automorphismen verschiedener Objekte (z. B. der Quaternionenalgebra der 2×2 -Matrizen, der linearen algebraischen Gruppe \mathbf{SL}_2 und der projektiven Geraden \mathbb{P}^1) beschreibt, führt dazu, dass die L/K -Formen dieser Objekte von $H^1(\text{Gal}(L/K), \mathbf{PGL}_2(L))$ klassifiziert werden (Satz 5.3). Das letzte Kapitel befasst sich hauptsächlich damit, wie man zwischen den Formen verschiedener Objekte, die zum selben Kozykel gehören, direkter übergehen kann. Außerdem wird mit Hilfe des Zusammenhangs zu Quaternionenalgebren die obige Kohomologiegruppe für lokale Körper und Zahlkörper bestimmt, was ebenfalls in keiner Quelle zu finden war.

Es ist nicht schwer, direkt zu beweisen, dass der Koordinatenring $K[X]$ des prinzipal-homogenen Raumes X genau dann isomorph zu $K[G]$ ist, wenn der X definierende Kozykel trivial ist (Lemma 4.14). Andernfalls muss der Unterschied zwischen $K[X]$ und $K[G]$ in der multiplikativen Struktur liegen, da er sich, wie oben beschrieben, nicht in der Zerlegung in irreduzible Darstellungen äußert. In dieser Arbeit konnte dieser Unterschied nur im einfachsten Fall eines prinzipal-homogenen Raums zu $\mathbf{PGL}_2/\mathbb{R}$ (vgl. Lemma 4.23) genauer herausgearbeitet werden.

1 Grundlagen

1.1 Bezeichnungen

Sei L/K eine Körpererweiterung und X ein über K definiertes Objekt. Dann sei X_L das zugehörige Objekt über dem Körper L .

Für ein Schema X über K beispielsweise stehe X_L für $X \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L$ (manchmal auch kurz als $X \times_K L$ geschrieben), und falls A eine K -Algebra ist, sei $A_L = A \otimes_K L$.

Weitere Bezeichnungen sind im Symbolverzeichnis am Ende dieser Arbeit zu finden.

1.2 Lineare algebraische Gruppen und Lie-Algebren

Die wichtigsten Definition und Ergebnisse über Lie-Algebren findet man in [Ser92]. Die grundlegenden Begriffe der Theorie der linearen algebraischen Gruppen findet man zum Beispiel bei Borel [Bor91], Springer [Spr98] und Humphreys [Hum75]. Dort wird auch der Zusammenhang zwischen linearen algebraischen Gruppen und Lie-Algebren erläutert. Insbesondere werden folgende Begriffe benötigt:

Definition 1.1. Sei K ein beliebiger Körper und G eine über K definierte lineare algebraische Gruppe. Die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ist definiert als

$$\mathfrak{g}(K) = \ker(\phi : G(K[\epsilon]) \rightarrow G(K)),$$

wobei in $K[\epsilon]$ die Relation $\epsilon^2 = 0$ besteht und die Abbildung ϕ durch $\epsilon \mapsto 0$ induziert ist.

Die Identitätskomponente des Zentralisators eines maximalen Torus einer algebraischen Gruppe G nennt man *Cartan-Untergruppe* von G .

Wenn C eine Cartan-Untergruppe zum maximalen Torus T einer algebraischen Gruppe G ist, dann nennt man die Unteralgebra $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ *maximalen Torus* der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, und $\mathfrak{h} = \text{Lie}(C)$ heißt *Cartan-Unteralgebra* zu \mathfrak{t} in \mathfrak{g} .

Es werden nur lineare algebraische Gruppen über einem Körper K betrachtet, deren maximaler Torus über K zerfällt. Dasselbe gilt also auch für die zugehörige Lie-Algebra.

1.3 Gruppenoperationen

Sei G eine über einem Körper K definierte lineare algebraische Gruppe, und sei X ein über K definiertes Schema.

Man sagt, dass G *von rechts auf X operiert*, falls es einen solchen Morphismus $\phi : X \times G \rightarrow X$ gibt, dass die folgenden Diagramme kommutieren (wobei $\mu : G \times G \rightarrow G$

die Multiplikation und $e : \text{Spec } K \rightarrow G$ das Einselement von G bezeichnen):

$$\begin{array}{ccc}
 X \times G \times G & \xrightarrow{\phi \times \text{id}_G} & X \times G & & X \times \text{Spec } K & \xrightarrow{\sim} & X \\
 \text{id}_X \times \mu \downarrow & & \phi \downarrow & \text{sowie} & \downarrow \text{id}_X \times e & & \parallel \\
 X \times G & \xrightarrow{\phi} & X & & X \times G & \xrightarrow{\phi} & X
 \end{array}$$

Diese Operation induziert folgendermaßen eine Operation der K -rationalen Punkte von G auf X : Sei $g : \text{Spec } K \rightarrow G$ ein solcher Punkt. Dann definiert

$$r_g : X \xrightarrow{\sim} X \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } K \xrightarrow{\text{id}_X \times g} X \times G \xrightarrow{\phi} X,$$

also $r_g = \phi \circ (\text{id}_X \times g) : X \rightarrow X$ eine Operation von $G(K)$ auf X , genannt *Rechtstranslation*.

Für einen K -rationalen Punkt $x : \text{Spec } K \rightarrow X$ definiert $r_g \circ x$ wieder einen K -rationalen Punkt auf X , der oft kurz als $x \cdot g$ oder xg geschrieben wird. Man erhält eine Gruppenoperation von rechts im üblichen Sinne für abstrakte Gruppen.

Die oben beschriebene Operation $r_g : X \rightarrow X$ induziert mit $r_g^* : K[X] \rightarrow K[X]$ eine Operation von $G(K)$ auf dem Koordinatenring von X . Dabei wird $f(x) \in K[X]$ auf $(r_g^* f)(x) = f(xg)$ abgebildet. Es handelt sich um eine Operation von links.

Analog definiert man den Begriff der Operation von links für die verschiedenen Fälle. Aus der Linksoperation l erhält man dabei auf dem Koordinatenring $K[X]$ eine Rechtsoperation $l_g^* : f(x) \mapsto f(gx)$.

Bemerkung 1.2. Im Allgemeinen reicht es nicht, die induzierte Operation von $G(K)$ auf $X(K)$ zu betrachten, denn es kann z. B. passieren, dass X keine K -rationalen Punkte hat.

In vielen Fällen genügt es aber doch, die Operation punktweise zu betrachten, etwa wenn die K -rationalen Punkte auf X dicht liegen. Auch die induzierte Operation auf dem Koordinatenring kann punktweise betrachtet werden.

1.4 Gruppenkohomologie

Allgemeines zur Gruppenkohomologie findet man zum Beispiel in Kapitel VII bis X von Serres *Local fields* [Ser79]. Hier sollen die wichtigsten Definitionen, Ergebnisse und Beispiele aus der Anhang zum dortigen Kapitel VII über nicht-abelsche Kohomologie und Kapitel X über Galois-Kohomologie zusammengefasst werden.

1.4.1 Nicht-abelsche Kohomologie

Sei Γ eine endliche Gruppe, A eine Gruppe, auf der Γ so operiert, dass diese Operation mit der Multiplikation auf A verträglich ist (genannt Γ -Gruppe, geschrieben als ${}^\sigma a$ für $\sigma \in \Gamma, a \in A$). Falls A abelsch ist, hat man die übliche Definition der Kohomologiegruppen $H^i(\Gamma, A)$. Aber auch wenn A nicht abelsch ist, kann man die nullte und erste Kohomologiegruppe definieren:

Definition 1.3. Sei $H^0(\Gamma, A) := A^\Gamma$, wobei A^Γ die Elemente aus A sind, die invariant unter der Operation von Γ sind.

Sei $H^1(\Gamma, A) := Z^1(\Gamma, A) / \sim$. Dabei ist $Z^1(\Gamma, A)$ die Menge der *1-Kozykeln*, d.h. die Menge der Abbildungen $a : \Gamma \rightarrow A$ mit $\sigma \mapsto a_\sigma$, die $a_{\sigma\gamma} = a_\sigma a_\gamma$ für alle $\sigma, \gamma \in \Gamma$ erfüllen; und zwei Kozykeln a, b heißen kohomolog ($a \sim b$), falls es ein solches $x \in A$ gibt, dass $b_\sigma = x^{-1} a_\sigma x$ für alle $\sigma \in \Gamma$ gilt.

Bemerkung 1.4. Sei c der triviale Kozykel mit $c_\sigma = e$ für alle $\sigma \in \Gamma$, wobei e das neutrale Element von A ist. Die Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation, sodass $H^1(\Gamma, A)$ eine wohldefinierte Menge ist, in der die Äquivalenzklasse des trivialen Kozykels c ausgezeichnet ist und *neutrales Element* genannt wird. Man nennt eine solche Menge mit ausgezeichnetem Element *punktierte Menge*.

Für punktierte Mengen macht es Sinn, von exakten Sequenzen zu sprechen: man fordert, dass das Bild einer Abbildung das Urbild des neutralen Elements der nächsten Abbildung ist.

Falls A abelsch ist, stimmen die obigen Definitionen mit den üblichen Definitionen in der Gruppenkohomologie überein.

Satz 1.5. Wenn $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$ eine kurze exakte Sequenz von Γ -Gruppen ist, dann erhält man eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow H^0(\Gamma, A) \rightarrow H^0(\Gamma, B) \rightarrow H^0(\Gamma, C) \rightarrow H^1(\Gamma, A) \rightarrow H^1(\Gamma, B) \rightarrow H^1(\Gamma, C).$$

Falls zusätzlich A im Zentrum von B enthalten ist, dann erhält man wieder eine exakte Sequenz, wenn man zusätzlich die zweite Kohomologiegruppe $H^2(\Gamma, A)$ anhängt.

Beweis. Siehe [Ser79], Anhang zu Kapitel VII. Wenn A abelsch ist, ist $H^2(\Gamma, A)$ definiert, und bereits um die Abbildung $H^1(\Gamma, C) \rightarrow H^2(\Gamma, A)$ zu definieren, muss A zusätzlich im Zentrum von B liegen. \square

Falls Γ keine endliche, aber immerhin eine *pro-endliche Gruppe* (vgl. [Ser02], 1.1) ist, gelten die vorherigen Aussagen weiterhin (mit gewissen Stetigkeitsbedingungen).

1.4.2 Galois-Kohomologie

Falls $\Gamma = \text{Gal}(L/K)$ eine Galois-Gruppe ist, dann ist Γ endlich oder pro-endlich. Man kann also die Gruppenkohomologie von Γ -Gruppen betrachten. Als abkürzende Schreibweise definiert man für eine lineare algebraische Gruppe A

$$H^i(L/K, A) = H^i(\text{Gal}(L/K), A(L)) \quad \text{und} \quad H^i(K, A) = H^i(\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K), A(K^{\text{sep}})),$$

wobei K^{sep} ein separabler Abschluss von K ist.

Satz 1.6. $H^1(L/K, \mathbf{GL}_n) = 1$.

Beweis. Siehe [Jah03], Lemma 4.10. \square

Korollar 1.7. $H^1(L/K, \mathbf{SL}_n) = 1$.

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \mathbf{SL}_n \rightarrow \mathbf{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

erhält man als Teil der langen exakten Kohomologiesequenz:

$$H^0(L/K, \mathbf{GL}_n) \rightarrow H^0(L/K, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(L/K, \mathbf{SL}_n) \rightarrow H^1(L/K, \mathbf{GL}_n),$$

also

$$\mathbf{GL}_n(K) \rightarrow K^* \rightarrow H^1(L/K, \mathbf{SL}_n) \rightarrow 1.$$

Weil $\det : \mathbf{GL}_n(K) \rightarrow K^*$ surjektiv ist, gilt die Behauptung. \square

Bemerkung 1.8. Hingegen muss $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ nicht trivial sein:

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbf{GL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2 \rightarrow 1$$

erhält man

$$1 = H^1(L/K, \mathbf{GL}_2) \rightarrow H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2) \rightarrow H^2(L/K, \mathbb{G}_m),$$

man hat also eine Injektion von $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ in $\text{Br}(L/K) = H^2(L/K, \mathbb{G}_m)$, die relative Brauergruppe.

Zum Beispiel gilt dann für $K = \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{C}$: $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ ist die zweielementige Gruppe. Aus [Ser79], Kapitel X, Proposition 8 und Lemma 1 erhält man in diesem Fall $H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbf{PGL}_2) = H^2(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbb{G}_m)$.

Da Γ insbesondere zyklisch ist, gilt

$$H^2(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbb{G}_m) = \widehat{H}^0(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbb{G}_m) = (\mathbb{C}^*)^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} / \text{Norm}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R}^* / \mathbb{R}_+^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

wobei es sich bei \widehat{H}^i um die *Tate-Kohomologiegruppen* handelt, und die *Norm-Abbildung* durch $\text{Norm}_{L/K}(x) = \sum_{\sigma \in \Gamma} \sigma x$ definiert ist (vgl. [Ser79], Kapitel VIII). Damit ist $H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbf{PGL}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bewiesen.

Ein nicht-trivialer Kozykel wird durch $\sigma \mapsto a_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ für die komplexe Konjugation σ gegeben. Denn das definiert wegen $a_\sigma \sigma a_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_e$ tatsächlich einen Kozykel (wobei $e \in \Gamma$ das neutrale Element ist), und wäre dieser trivial, müsste $a_\sigma = x^{-1} \cdot \sigma x$ für ein $x \in \mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$ gelten. Das ist äquivalent zu $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma x_1 & \sigma x_2 \\ \sigma x_3 & \sigma x_4 \end{bmatrix}$, also $\begin{bmatrix} -x_2 & x_1 \\ -x_4 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma x_1 & \sigma x_2 \\ \sigma x_3 & \sigma x_4 \end{bmatrix}$, woraus für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ folgen würde: $-\lambda x_2 = \sigma x_1$ und $\lambda x_1 = \sigma x_2$. Daraus erhält man direkt $|\lambda| = \sigma \lambda \lambda = -1$ (weil x_1 und x_2 nicht beide null sein dürfen), was ein Widerspruch ist.

2 Lie-Algebren

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffe der Darstellungstheorie von Lie-Algebren behandelt und für den Fall \mathbf{PGL}_n berechnet.

2.1 Darstellungen von Lie-Algebren

In diesem Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik 0, und \mathfrak{g} und \mathfrak{g}' seien Lie-Algebren über K .

Definition 2.1. Ein *Homomorphismus von Lie-Algebren* $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ist ein Vektorraumhomomorphismus von \mathfrak{g} nach \mathfrak{g}' , der zusätzlich $\phi([g_1, g_2]) = [\phi(g_1), \phi(g_2)]$ für alle $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$ erfüllt.

Eine *Darstellung* ϕ einer Lie-Algebra \mathfrak{g} in einen Vektorraum V ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$. Äquivalent ist, dass V ein \mathfrak{g} -Modul ist, d. h. dass es eine bilineare Abbildung $\cdot : \mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ mit $(g, v) \mapsto g \cdot v$ gibt, die die Bedingung $[g_1, g_2] \cdot v = g_1 \cdot (g_2 \cdot v) - g_2 \cdot (g_1 \cdot v)$ erfüllt.

Eine *Unterdarstellung* ist ein \mathfrak{g} -Untermodul, d. h. ein Untervektorraum $W \subset V$, für den $g \cdot w \in W$ für alle $g \in \mathfrak{g}, w \in W$ gilt.

Eine Darstellung ϕ in V heißt *irreduzibel*, wenn $\{0\}$ und V die einzigen \mathfrak{g} -Untermodule von V sind. V wird dann auch *einfacher \mathfrak{g} -Modul* genannt (vgl. [Ser92], VI.3).

Sei \mathfrak{h} eine Cartan-Unteralgebra der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Für einen \mathfrak{g} -Modul V und $\chi \in \mathfrak{h}^*$ definiert man

$$V_\chi = \{v \in V \mid h \cdot v = \chi(h)v \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

V_χ ist ein Untervektorraum von V . Falls $V_\chi \neq \{0\}$, so nennt man V_χ *Eigenraum*, χ *Gewicht von V* , die Dimension von V_χ die *Vielfachheit des Gewichts χ* , und jedes $v \in V_\chi \setminus \{0\}$ heißt *Eigenvektor zum Gewicht χ* .

Bemerkung 2.2. Vgl. Bemerkung 3.3 dazu, dass hier im Gegensatz zur üblichen Definition für lineare algebraische Gruppen kein maximaler Torus, sondern eine Cartan-Unteralgebra verwendet wird.

Folgendermaßen erhält man das Tensorprodukt der Darstellungen $\phi_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_i)$ ($i = 1, 2$): Der Vektorraum $V_1 \otimes V_2$ wird durch

$$\phi_1 \otimes \phi_2 : \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad (g, x \otimes y) \mapsto \phi_1(g)(x) \otimes y + x \otimes \phi_2(g)(y)$$

(kurz: $g(x \otimes y) = gx \otimes y + x \otimes gy$) zum \mathfrak{g} -Modul. Falls $v_i \in V_i$ Eigenvektor zum Gewicht χ_i ist ($i = 1, 2$), dann ist $v_1 \otimes v_2$ Eigenvektor zum Gewicht $\chi_1 + \chi_2$, denn

$$h(v_1 \otimes v_2) = hv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes hv_2 = \chi_1(h)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \chi_2(h)v_2 = (\chi_1 + \chi_2)(h) \cdot (v_1 \otimes v_2).$$

Fasst man \mathfrak{g} zunächst nur als K -Vektorraum auf, wird \mathfrak{g} durch $g_1 \cdot g_2 := [g_1, g_2]$ selbst zu einem \mathfrak{g} -Modul. Die zugehörige Darstellung ist die *adjungierte Darstellung* $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ mit $g \mapsto \text{ad}(g) := [g, \cdot]$.

Die Gewichte $\neq 0$ der adjungierten Darstellung nennt man *Wurzeln* von \mathfrak{g} . Die Wurzeln bilden ein *abstraktes Wurzelsystem* Φ mit *einfachen Wurzeln* Δ und *positiven Wurzeln* Φ^+ , vgl. [Hum75], 27.1, 27.3 und [Bou68], Chap. 6.

Satz 2.3. *Für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} über einem Körper K , deren Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} über K definiert ist und deren Wurzelsystem Φ ist, gilt die Cartan-Zerlegung*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\chi \in \Phi} V_\chi.$$

Beweis. Vgl. [Bor70], 1.1. Falls \mathfrak{g} eine der Lie-Algebren \mathfrak{gl}_n , \mathfrak{pgl}_n oder \mathfrak{sl}_n ist, lässt sich das auch leicht direkt nachrechnen. \square

Definition 2.4. Man nennt $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow K$, $(X, Y) \mapsto \text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$ die *Killing-Form* von \mathfrak{g} .

Die Killing-Form ist eine symmetrische Bilinearform auf \mathfrak{g} . Sie ist genau dann nicht ausgeartet, wenn \mathfrak{g} eine *halbeinfache* Lie-Algebra ist, d. h. \mathfrak{g} kein abelsches Ideal ungleich null hat. Vgl. [Ser92], Def. V.1.2 und Satz VI.2.1.

Da durch die Killing-Form einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} ein Skalarprodukt auf der Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} induziert wird, erhält man in üblicher Weise auch ein Skalarprodukt (\cdot, \cdot) auf \mathfrak{h}^* . Für $a, b \in \mathfrak{h}^*$ setze man $n_{ab} := 2 \frac{(a,b)}{(b,b)} \in \mathbb{Q}$. Falls $a, b \in \Phi$, so gilt $n_{ab} \in \mathbb{Z}$, weil Φ ein Wurzelsystem ist.

Definition 2.5. Für $a, b \in \Phi$, $a \neq \pm b$ sei $p(a, b)$ die größte ganze Zahl, für die $a - p(a, b) \cdot b \in \Phi$ gilt. Man wählt für jedes $a \in \Phi$ ein $x_a \in \mathfrak{g}_a \setminus \{0\}$ und setzt $h_a := [x_a, x_{-a}] \in \mathfrak{h}$.

Die Elemente h_a ($a \in \Delta$) und x_b ($b \in \Phi$) heißen *Chevalley-Basis* (vgl. [Bor70]) von \mathfrak{g} , falls gilt:

1. $[x_a, x_b] = 0$ für $a, b \in \Phi$, $a + b \notin \Phi$, $a + b \neq 0$,
2. $[x_a, x_b] = \pm(p(a, b) + 1) \cdot x_{a+b}$ für $a, b, a + b \in \Phi$,
3. $[h_a, x_b] = n_{ba} \cdot x_b$ für $a, b \in \Phi$.

Definition 2.6. Gegeben sei eine Chevalley-Basis zu einer Lie-Algebra \mathfrak{g} mit Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} . Ein $\chi \in \mathfrak{h}^*$ heißt *Gewicht* (von \mathfrak{g}) genau dann, wenn $\chi(h_a) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \Phi$.

Für $a \in \Delta$ sei $\ell_a \in \mathfrak{h}^*$ definiert durch $\ell_a(h_b) = \delta_{a,b}$ ($b \in \Delta$). Die ℓ_a heißen *fundamentaldominante Gewichte*. Ein Gewicht χ heißt *dominant*, falls $\chi(h_a) \geq 0$ für alle $a \in \Phi^+$.

Jede Wurzel ist ganzzahlige Linearkombination von einfachen Wurzeln. Daher ist χ genau dann Gewicht, wenn $\chi(h_a) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \Delta$. Da die h_b für $b \in \Delta$ eine Basis von \mathfrak{h} bilden, sind die ℓ_a mit obigen Bedingung wohldefiniert und eindeutig bestimmt.

Die Gewichte bilden das *Gewichtsgitter*, ein Gitter in \mathfrak{h}^* , das mit Γ_{sc} bezeichnet wird. Die dominanten Gewichte sind genau die Linearkombinationen der fundamental-dominanten Gewichte mit Koeffizienten aus \mathbb{Z}_0^+ , und jedes Gewicht ist offenbar eine ganzzahlige Linearkombination der fundamental-dominanten Gewichte. Diese bilden also eine Basis des Gewichtsgitters.

Sei (ϕ, V) eine endlich-dimensionale Darstellung von \mathfrak{g} . Die Gewichte der Darstellung wurden in Definition 2.1 erklärt. Sie erzeugen ein Gitter Γ_ϕ . Falls ϕ eine treue Darstellung ist, gilt

$$\Gamma_{ad} \subset \Gamma_\phi \subset \Gamma_{sc},$$

wobei Γ_{ad} das von den Wurzeln von \mathfrak{g} , also den Gewichten der adjungierten Darstellung, erzeugte Gitter ist, genannt *Wurzelgitter* (vgl. [Bor70], 2.1).

Insbesondere ist jedes Gewicht jeder treuen Darstellung von \mathfrak{g} (vgl. Definition 2.1) auch ein Gewicht von \mathfrak{g} (vgl. Definition 2.6).

2.2 Beispiele

Lemma 2.7. *Die zu $G = \mathbf{GL}_2$ gehörige Lie-Algebra ist \mathfrak{gl}_2 , die Lie-Algebra der 2×2 -Matrizen \mathbb{M}_2 mit Lie-Operation $[X, Y] := XY - YX$.*

Beweis. Per Definition gilt $\text{Lie}(\mathbf{GL}_2)(K) = \ker(\phi : \mathbf{GL}_2(K[\epsilon]) \rightarrow \mathbf{GL}_2(K))$. Es gilt $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genau dann, wenn $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y_1\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & 1+y_4\epsilon \end{pmatrix}$ mit $y_i \in K$. Wegen $\det\left(\begin{pmatrix} 1+y_1\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & 1+y_4\epsilon \end{pmatrix}\right) = 1 + (y_1 + y_4)\epsilon \neq 0$ ist $y_i \in K$ beliebig.

Wegen $\begin{pmatrix} 1+y_1\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & 1+y_4\epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+z_1\epsilon & z_2\epsilon \\ z_3\epsilon & 1+z_4\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(y_1+z_1)\epsilon & (y_2+z_2)\epsilon \\ (y_3+z_3)\epsilon & 1+(y_4+z_4)\epsilon \end{pmatrix}$ lässt sich die multiplikative Menge $\left\{\begin{pmatrix} 1+y_1\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & 1+y_4\epsilon \end{pmatrix} \mid y_i \in K\right\}$ auch als $\left\{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \mid y_i \in K\right\}$ mit Addition auffassen.

Dass dann mit $[X, Y] = XY - YX$ die Jacobi-Identität erfüllt ist, lässt sich leicht nachrechnen. \square

Bemerkung 2.8. Analog gilt $\text{Lie}(\mathbf{GL}_n) = \mathfrak{gl}_n = \mathbb{M}_n$. Insbesondere gilt $\mathfrak{gl}_1(K) = K$ mit trivialer Lie-Operation.

Lemma 2.9. *Die Lie-Algebra zu \mathbf{PGL}_2 ist $\mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{gl}_2/\mathfrak{gl}_1$, wobei \mathfrak{gl}_1 als Vielfache der Einheitsmatrix in \mathfrak{gl}_2 eingebettet ist.*

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 2.7 berechnet man, dass die Matrizen in $\text{Lie}(\mathbf{PGL}_2)(K)$ die Form $\begin{bmatrix} \alpha+y_1\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & \alpha+y_4\epsilon \end{bmatrix}$ mit $\alpha \in K^*$, $y_i \in K$ haben. Wähle für jede solche Matrix den Repräsentanten mit $\alpha = 1$. Dann bilden alle $\begin{bmatrix} 1+\beta\epsilon & 0 \\ 0 & 1+\beta\epsilon \end{bmatrix}$ -Vielfachen dieser Matrix eine Äquivalenzklasse in $\text{Lie}(\mathbf{PGL}_2)(K)$, d. h. für alle $\beta \in K$ erhält man $\begin{bmatrix} 1+y_1\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & 1+y_4\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(y_1+\beta)\epsilon & y_2\epsilon \\ y_3\epsilon & 1+(y_4+\beta)\epsilon \end{bmatrix} \in \text{Lie}(\mathbf{PGL}_2)(K)$.

Fasst man diese Matrizen wieder als $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$ mit Addition auf, gilt für alle $\beta \in K$ die Relation $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+\beta & y_2 \\ y_3 & y_4+\beta \end{bmatrix}$. \square

Bemerkung 2.10. Analog erhält man $\text{Lie}(\mathbf{PGL}_n) = \mathfrak{gl}_n/\mathfrak{gl}_1$.

Bemerkung 2.11. Die Diagonalmatrizen bilden einen maximalen Torus T von \mathbf{GL}_n , d. h. es gilt

$$T(K) = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in K^*\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in K^* \right\}.$$

Lemma 2.12. *Der maximale Torus T von \mathbf{GL}_n ist gleichzeitig Cartan-Untergruppe dieser Gruppe.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} Z_G(T(K)) &= \{g \in G \mid gt = tg \ \forall t \in T(K)\} \\ &= \{(g_{i,j}) \in G \mid (\lambda_j g_{i,j}) = (\lambda_i g_{i,j}) \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K^*\} \\ &= \{\text{diag}(g_{1,1}, \dots, g_{n,n}) \in G\} \\ &= T(K), \end{aligned}$$

und weil \mathbf{GL}_n zusammenhängend ist, gilt auch $T^0 = T$ (vgl. [Spr98], 6.4.7/6.4.8). \square

Lemma 2.13. *Die Lie-Algebra \mathfrak{h} mit $\mathfrak{h}(K) = \{H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n) \mid h_i \in K\}$ ist eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, und $\mathfrak{z} \cong \mathfrak{gl}_1$ mit $\mathfrak{z}(K) = \{D = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda) \mid \lambda \in K\}$ ist das Zentrum von \mathfrak{g} . Eine Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{pgl}_n ist $\mathfrak{h}/\mathfrak{gl}_1$.*

Diese Cartan-Unteralgebren sind gleichzeitig maximale Tori der jeweiligen Lie-Algebren.

Beweis. Sei T wie oben maximaler Torus und Cartan-Untergruppe von \mathbf{GL}_n . Dass $\text{Lie}(T) = \mathfrak{h}$ gilt, ist eine Standard-Rechnung. Also ist \mathfrak{h} maximaler Torus und Cartan-Untergruppe von \mathfrak{g} . Das Zentrum von \mathfrak{g} ist \mathfrak{z} , weil \mathbb{G}_m das Zentrum von \mathbf{GL}_n ist.

Die Aussage über \mathfrak{pgl}_n folgt daraus als Spezialfall von [Bou75], Chap. 7, §2.1. \square

Lemma 2.14. *T/\mathbb{G}_m ist ein maximaler Torus und eine Cartan-Untergruppe von \mathbf{PGL}_n .*

Beweis. Das folgt direkt aus dem zweiten Teil von Lemma 2.13. \square

Bemerkung 2.15. Die Charakteristik von K sei zunächst 0. Die Lie-Algebra \mathfrak{sl}_n von \mathbf{SL}_n besteht aus den Matrizen aus \mathbb{M}_n mit Spur 0, und \mathfrak{pgl}_n ist durch

$$\phi : \mathfrak{pgl}_n(K) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(K), [X] \mapsto X - \left(\frac{1}{n} \text{tr } X\right) I_n$$

isomorph zu \mathfrak{sl}_n , wobei I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist.

Man prüft leicht nach, dass ϕ wohldefiniert ist, und wegen $[X] = [\phi(X)] \in \mathfrak{pgl}_n(K)$ ist das offensichtlich ein Homomorphismus von Lie-Algebren mit Umkehrabbildung $Y \mapsto [Y]$ für $Y \in \mathfrak{sl}_n(K)$.

Dieser Beweis funktioniert auch in positiver Charakteristik p , falls p und n teilerfremd sind. Andernfalls sind $\mathfrak{pgl}_n(K)$ und $\mathfrak{sl}_n(K)$ nicht unbedingt isomorph. Zum Beispiel gilt für $K = \mathbb{F}_2$ und $n = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liegen im Zentrum von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}_2)$, aber für $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{F}_2)$ prüft man leicht nach, dass nur $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ im Zentrum liegt.

2.2.1 Darstellungen

Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ mit der in Lemma 2.13 angegebenen Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} lässt sich jedes $\chi \in (\mathfrak{h}(K))^*$ als $\chi(\text{diag}(h_1, \dots, h_n)) = \sum_{i=1}^n u_i h_i$ mit $u_i \in K$ darstellen. $((\mathfrak{h}/\mathfrak{gl}_1)(K))^*$ ist dann die Menge der χ , die auf $\mathfrak{gl}_1 \subset \mathfrak{h}$ trivial sind, d. h. bei denen $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ gilt.

Sei $E_{i,j} \in \mathfrak{gl}_n(K)$ die Elementarmatrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Die zugehörige Äquivalenzklasse in $\mathfrak{pgl}_n(K)$ sei ebenfalls mit $E_{i,j}$ bezeichnet, und sei $V_{i,j}$ der davon erzeugte Untervektorraum.

Lemma 2.16. *Die Wurzeln von \mathfrak{pgl}_n sind $\chi_{i,j} \in \mathfrak{h}^*$ für $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, definiert durch $\chi_{i,j}(\text{diag}(h_1, \dots, h_n)) = h_i - h_j$, mit Eigenräumen $V_{i,j}$.*

Beweis. Für beliebiges $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n) \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{gl}_1)(K)$ und $X = x \cdot E_{i,j} \in V_{i,j}$ gilt

$$\text{ad}(H)(X) = [H, X] = (h_i - h_j) \cdot x \cdot E_{i,j} = \chi_{i,j}(H) \cdot X.$$

Daher liegt $V_{i,j}$ im Eigenraum zum Gewicht $\chi_{i,j}$.

Da außerdem $\mathfrak{pgl}_n = \mathfrak{h}/\mathfrak{gl}_1 \oplus \bigoplus_{i \neq j \in \{1, \dots, n\}} V_{i,j}$ gilt, folgt aus der Cartan-Zerlegung (Satz 2.3), dass $V_{i,j}$ der Eigenraum zum Gewicht $\chi_{i,j}$ ist und es keine weiteren Wurzeln gibt. \square

Das Wurzelsystem zur Lie-Algebra \mathfrak{pgl}_n ist folglich

$$\Phi = \{\chi_{i,j} \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\} \cong A_{n-1},$$

wobei A_n die übliche Bezeichnung dieses Standard-Wurzelsystem und des zugehörigen Dynkin-Diagramms ist (vgl. Anhang von [Hum75]). Als positive Wurzeln kann man etwa

$$\Phi^+ = \{\chi_{i,j} \mid i < j\}$$

wählen. Dann sind die einfachen Wurzeln

$$\Delta = \{\chi_{1,2}, \dots, \chi_{i,i+1}, \dots, \chi_{n-1,n}\},$$

und es gilt $-\chi_{i,j} = \chi_{j,i}$.

Zur Illustration der Definitionen 2.4, 2.5 und 2.6 werden bis zum Ende dieses Abschnitts die Killing-Form, eine Chevalley-Basis und das Gewichtsgitter zu \mathfrak{pgl}_n bestimmt. Für die weiteren Kapitel dieser Arbeit sind diese Berechnungen allerdings nicht wichtig.

Lemma 2.17. *Es gilt $[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{jk} E_{i,l} - \delta_{il} E_{k,j}$.*

Beweis. Triviale Rechnung. \square

Lemma 2.18. *Die Einschränkung der Killing-Form auf die Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} von \mathfrak{gl}_n ist gegeben durch $B(E_{i,i}, E_{j,j}) = 2n\delta_{ij} - 2$.*

Beweis. Es gilt $\text{ad } X(\text{ad } Y(Z)) = [X, [Y, Z]]$. Mit $X = E_{i,i}$, $Y = E_{j,j}$, $Z = E_{k,l}$ gilt

$$[X, [Y, Z]] = [E_{i,i}, \delta_{jk} E_{j,l} - \delta_{jl} E_{k,j}] = \delta_{ij} \delta_{jk} E_{i,l} - \delta_{il} \delta_{jk} E_{j,i} - \delta_{ik} \delta_{jl} E_{i,j} + \delta_{ij} \delta_{jl} E_{k,i}.$$

Man erhält $\text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$, indem man in $[E_{i,i}, [E_{j,j}, E_{k,l}]]$ die Koeffizienten α_{kl} von $E_{k,l}$ für $k, l \in \{1, \dots, n\}$ aufsummiert:

Für $i = j$ gilt $\alpha_{kl} = \delta_{ik} - \delta_{il} \delta_{ik} - \delta_{il} \delta_{ik} + \delta_{il} = \delta_{ik} + \delta_{il} - 2\delta_{il} \delta_{ik}$, also $\sum_{k,l} \alpha_{kl} = 2n - 2$. Für $i \neq j$ gilt $\alpha_{kl} = -\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}$, also $\sum_{k,l} \alpha_{kl} = -2$. \square

Lemma 2.19. Die Killing-Form auf der Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} von \mathfrak{pgl}_n ist gegeben durch

$$B(E_{i,i}, E_{j,j}) = 2n\delta_{ij} - 2.$$

Beweis. Allgemein gilt, dass ein abelsches Ideal \mathfrak{g}' einer Lie-Algebra \mathfrak{g} im Radikal der Killing-Form liegt (vgl. Beweis von Satz VI.2.1 in [Ser92] für diese einfache Aussage). Damit induziert die Killing-Form eine symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$, und diese stimmt mit der Killing-Form dieser Quotienten-Lie-Algebra überein. \square

Lemma 2.20. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{pgl}_n(K)$ ist das von der Killing-Form induzierte Skalarprodukt auf \mathfrak{h}^* gegeben durch $B^*(\chi_{i,j}, \chi_{k,l}) = \frac{1}{2n}(\delta_{ik} - \delta_{il} - \delta_{jk} + \delta_{jl})$, und es gilt $n_{\chi_{i,j}, \chi_{k,l}} = \delta_{ik} - \delta_{il} - \delta_{jk} + \delta_{jl}$.

Insbesondere gilt

$$B^*(\chi_{k,k+1}, \chi_{l,l+1}) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & k = l, \\ -\frac{1}{2n}, & k = l \pm 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad n_{\chi_{k,k+1}, \chi_{l,l+1}} = \begin{cases} 2, & k = l, \\ -1, & k = l \pm 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Das Skalarprodukt auf \mathfrak{h} gibt einen kanonischen Isomorphismus $\cdot^* : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$, gegeben durch $H^*(\cdot) = B(H, \cdot)$. Durch $B^*(H_1^*, H_2^*) := B(H_1, H_2)$ ist dann das Skalarprodukt B^* auf \mathfrak{h}^* gegeben.

Es gilt $\chi_{i,j} = (\frac{1}{2n}(E_{i,i} - E_{j,j}))^*$, denn mit $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ gilt

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2n}(E_{i,i} - E_{j,j}))^*(H) &= \frac{1}{2n}B(E_{i,i} - E_{j,j}, H) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (2n(\delta_{ik} - \delta_{jk})h_k) = h_i - h_j \\ &= \chi_{i,j}(H). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} B^*(\chi_{i,j}, \chi_{k,l}) &= \frac{1}{4n^2}B(E_{i,i} - E_{j,j}, E_{k,k} - E_{l,l}) \\ &= \frac{1}{4n^2}((2n\delta_{ik} - 2) - (2n\delta_{il} - 2) - (2n\delta_{jk} - 2) + (2n\delta_{jl} - 2)), \end{aligned}$$

was genau den oben angegebenen Ausdruck ergibt.

Das Nachrechnen der zweiten Aussage ist nun trivial. \square

Lemma 2.21. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{pgl}_n(K)$ sowie $X_{i,j} = E_{i,j}$ und $H_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j}$ für $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $\{X_{i,j} \mid i \neq j \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{H_{i,i+1} \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ eine Chevalley-Basis von \mathfrak{g} .

Beweis. Mit Lemma 2.17 gilt $[X_{i,j}, X_{k,l}] = \delta_{jk}E_{i,l} - \delta_{il}E_{k,j}$, und daraus folgt direkt $H_{i,j} = [X_{i,j}, X_{j,i}]$.

Falls $j = k$, gilt $\chi_{i,j} + \chi_{k,l} = \chi_{i,l} \in \Phi \cup \{0\}$; falls $i = l$, gilt $\chi_{i,j} + \chi_{k,l} = \chi_{k,j} \in \Phi \cup \{0\}$. Damit ist Bedingung (1) aus Definition 2.5 nur für $i \neq l$ und $j \neq k$ zu überprüfen und dort offenbar erfüllt.

Es gilt $(\chi_{i,j} - p\chi_{k,l})(H) = h_i - h_j - ph_k + ph_l$. Für $p > 0$ ist das offenbar nur dann eine Wurzel, wenn $p = 2$, $i = k$, $j = l$. In diesem Fall ist aber $\chi_{i,j} = \chi_{k,l}$, und Bedingung (2) ist nicht zu überprüfen. Für Bedingung (2) kann man also von $p(\chi_{i,j}, \chi_{k,l}) = 0$ ausgehen.

$\chi_{i,j} + \chi_{k,l} \in \Phi$ gilt offenbar nur in den Fällen $j = k$, $i \neq l$ bzw. $j \neq k$, $i = l$. Im ersten Fall erhält man $[X_{i,j}, X_{k,l}] = E_{i,l}$, im zweiten $[X_{i,j}, X_{k,l}] = -E_{k,j}$, was genau die Aussage von Bedingung (2) ist.

Mit Lemma 2.20 und Lemma 2.17 ergibt sich (3):

$$\begin{aligned} [H_{i,j}, X_{k,l}] &= [E_{i,i} - E_{j,j}, E_{k,l}] \\ &= \delta_{ik}E_{i,l} - \delta_{il}E_{k,i} - \delta_{jk}E_{j,l} + \delta_{jl}E_{k,j} \\ &= (\delta_{ik} - \delta_{il} - \delta_{jk} + \delta_{jl})E_{k,l} = n_{\chi_{k,l}, \chi_{i,j}} X_{k,l}. \end{aligned}$$

Damit sind alle Eigenschaften einer Chevalley-Basis verifiziert. \square

Lemma 2.22. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{pgl}_n(K)$ mit der in Lemma 2.21 angegebenen Chevalley-Basis.

Sei $\chi \in \mathfrak{h}^*$ definiert durch $\chi(\text{diag}(h_1, \dots, h_n)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j$ mit $\sum \lambda_j = 0$.

χ ist genau dann ein Gewicht, wenn die λ_j die Form $\mu_j + \frac{\eta}{n}$ für $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z}$, $\eta \in \{0, \dots, n-1\}$ haben und $\eta + \sum_{j=1}^n \mu_j = 0$ gilt.

Die fundamental-dominanten Gewichte $\ell_i = \ell_{\chi_{i,i+1}}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, sind in obiger Form gegeben durch

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 - \frac{i}{n}, & j \leq i, \\ -\frac{i}{n}, & j > i. \end{cases}$$

Die χ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ bilden das Wurzelgitter Γ_{ad} von $\mathfrak{pgl}_n(K)$. Der Index $[\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}]$ des Wurzelgitters im Gewichtsgitter ist n .

Beweis. Sei χ ein Gewicht. Es gilt $\chi(H_{i,i+1}) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Die Bedingung $\chi(H_{i,i+1}) \in \mathbb{Z}$ ist also genau dann erfüllt, wenn $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}$ gilt, wenn sich also jedes λ_i als $\mu_i + \eta'$ mit $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $\eta' \in K$ schreiben lässt. Wegen $n \cdot \eta' + \sum \mu_i = \sum \lambda_i = 0$ muss η' die Form $\frac{\eta}{n}$ für ein $\eta \in \mathbb{Z}$ haben. Also hat jedes Gewicht die oben angegebene Form. Außerdem ist offensichtlich, dass jedes χ dieser Form ein Gewicht ist.

Sei ℓ_i wie behauptet gegeben. Wegen $\sum_{j=1}^n \lambda_j = i \cdot (1 - \frac{i}{n}) - (n-i) \frac{i}{n} = 0$ gilt $\ell_i \in \mathfrak{h}^*$. Wie für fundamental-dominante Gewichte gefordert, gilt

$$\ell_i(H_{j,j+1}) = \ell_i(E_{j,j} - E_{j+1,j+1}) = \lambda_j - \lambda_{j+1} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Die Wurzeln von $\mathfrak{pgl}_n(K)$ wurden in Lemma 2.16 bestimmt. In der obigen Form haben sie die Eigenschaft $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Daher können nur Gewichte χ , die in der obigen Form ganzzahlige λ_i haben, im Wurzelgitter liegen, und wegen $\chi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \chi_{i,i+1}$ lässt sich ein solches Gewicht tatsächlich als ganzzahlige Linearkombination der einfachen Wurzeln schreiben.

Jedes Gewicht, das nicht im Wurzelgitter liegt, für das also $\eta \neq 0$ in der obigen Form gilt, lässt sich als Summe eines Elements des Wurzelgitters und des fundamental-dominanten Gewichts ℓ_η schreiben. Andererseits liegt die Differenz von zwei verschiedenen ℓ_i, ℓ_j nicht im Wurzelgitter. Daher bilden $\{0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}\}$ ein System von Nebenklassenvertretern von Γ_{sc}/Γ_{ad} , was die letzte Behauptung beweist. \square

3 Lineare algebraische Gruppen

Zunächst werden die wesentlichen Ergebnisse der allgemeinen Theorie der Beschreibung irreduzibler Darstellungen reductiver linearer algebraischer Gruppen durch Höchstgewichte zusammengefasst.

Danach wird für den Fall \mathbf{PGL}_2 die Kohomologie eines Geradenbündels bestimmt, das die irreduziblen Darstellungen liefert. Schließlich werden die auftretenden Effekte an den Gruppen \mathbf{PGL}_2 , \mathbf{PGL}_n , \mathbf{GL}_2 und \mathbf{SL}_2 in Charakteristik 0 illustriert, und es wird an \mathbf{SL}_2 und \mathbf{PGL}_2 gezeigt, was in positiver Charakteristik komplizierter wird.

Jede Darstellung, bei der es nicht explizit anders angegeben ist, soll endlich-dimensional sein.

3.1 Höchstgewichtsdarstellungen

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über einem Körper K . Analog zur Begriffsbildung bei Lie-Algebren (vgl. Definition 2.1) definiert man:

Definition 3.1. Eine *Darstellung* von G über K ist ein K -Vektorraum V zusammen mit einem über K definierten Homomorphismus $\phi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ linearer algebraischer Gruppen. Man bezeichnet ϕ dann auch als *Operation* von G auf V , und V wird *G -Modul* genannt.

Eine *Unterdarstellung* von (ϕ, V) ist ein Untervektorraum $W \subset V$, der stabil unter der Operation von G ist, zusammen mit der Einschränkung von ϕ auf W . Falls $\{0\}$ und V die einzigen Unterdarstellungen von V sind, nennt man ϕ *irreduzibel*.

Satz 3.2. Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Die Gruppe G ist genau dann reduktiv, wenn jede Darstellung von G eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ist.

Beweis. Vgl. [Wat79], 12.5. □

Sei G von nun an zusätzlich reduktiv, und sei T ein K -Torus in G . Sei $\phi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine Darstellung von G über K . Sei W ein Untervektorraum von V . Man hat einen Homomorphismus $r_W : \mathbf{GL}(V) \rightarrow \text{Hom}(W, V)$ durch Einschränkung.

Einen Charakter $\chi \in X(T)$ kann man auch als Abbildung $\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_m \subset \mathbf{GL}(V)$ auffassen, und man definiert

$$\begin{aligned} V_\chi &= \max\{\text{Unterraum } W \subset V \mid r_W \circ \phi|_T = r_W \circ \chi\} \\ &= \{v \in V \mid \phi(t)(v) = \chi(t) \cdot v \quad \forall t \in T\}. \end{aligned}$$

Falls $V_\chi \neq \{0\}$ ist, nennt man V_χ *Eigenraum*, χ *Gewicht der Darstellung*, die Dimension von V_χ *Vielfachheit des Gewichts* χ und jedes $v \in V_\chi \setminus \{0\}$ *Eigenvektor zum Gewicht* χ .

Bemerkung 3.3. Bei der entsprechenden Definition 2.1 für Lie-Algebren wurde eine Cartan-Unteralgebra (und nicht, wie hier, ein maximaler Torus) verwendet. Dass diese Definition trotzdem ganz analog ist, liegt daran, dass bei zusammenhängenden, reduktiven Gruppen maximale Tori mit den zugehörigen Cartan-Untergruppen übereinstimmen (vgl. [Spr98], 7.6.4.ii).

Das Tensorprodukt von zwei Darstellungen (ϕ_1, V_1) , (ϕ_2, V_2) ist der Vektorraum $V_1 \otimes V_2$ mit Operation von G durch

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(g) : v_1 \otimes v_2 \mapsto \phi_1(g)(v_1) \otimes \phi_2(g)(v_2).$$

Ist v_i Eigenvektor zum Gewicht χ_i , dann ist $v_1 \otimes v_2$ Eigenvektor zum Gewicht $\chi_1 + \chi_2$, denn es gilt für alle $t \in T$:

$$\begin{aligned} (\phi_1 \otimes \phi_2)(t)(v_1 \otimes v_2) &= \phi_1(t)(v_1) \otimes \phi_2(t)(v_2) = \chi_1(t)v_1 \otimes \chi_2(t)v_2 \\ &= (\chi_1(t)\chi_2(t)) \cdot (v_1 \otimes v_2) = (\chi_1 + \chi_2)(t) \cdot (v_1 \otimes v_2). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass sich die Gruppenoperation in $X(T)$ durch Multiplikation ergibt, aber wie üblich additiv geschrieben wird.

Definition 3.4. Eine *Borelgruppe* von G ist eine abgeschlossene zusammenhängende auflösbare Untergruppe von G , die mit diesen Eigenschaften maximal ist (vgl. [Spr98], 6.2.7).

Fixiere zu G eine Borelgruppe B , einen Torus T , ein Wurzelsystem Φ der Gewichte der adjungierten Darstellung von G auf $\text{Lie}(G)$ und ein System Δ von fundamentalen Wurzeln. Alle diese Objekte sollen zueinander passen, d. h. $T \subset B$, und Δ soll zu B im Sinne von [Spr98], 7.4.5, 7.4.6 passen. Die Menge der positiven Wurzeln wird mit Φ^+ bezeichnet.

Die Weylgruppe von Φ ist $W = N_G(T)/T$. Die Charaktergruppe $X(T)$ ist mit einer Bilinearform (\cdot, \cdot) ausgestattet, die invariant unter W ist.

Ein $\chi \in X(T)_{\mathbb{Q}} := X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, das für alle $\delta \in \Phi$ die Bedingung $2 \frac{(\chi, \delta)}{(\delta, \delta)} \in \mathbb{Z}$ erfüllt, heißt *Gewicht von G* . Die Gewichte bilden ein Gitter in $X(T)_{\mathbb{Q}}$, genannt *Gewichtsgitter*.

Durch Festlegung der positiven Wurzeln wird das Gewichtsgitter von G zur teilweise geordneten Menge, indem man festlegt: $\chi_1 \geq \chi_2$ genau dann, wenn in der Darstellung $\chi_1 - \chi_2 = \sum_{\delta \in \Delta} \lambda_{\delta} \delta$ alle λ_{δ} nicht-negativ sind.

Ein Gewicht χ heißt *dominant*, falls $(\chi, \delta) \geq 0$ für alle $\delta \in \Delta$, und χ heißt *fundamental-dominant*, falls $(\chi, \alpha) = 1$ für ein $\alpha \in \Delta$ sowie $(\chi, \delta) = 0$ für alle anderen $\delta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ gilt. Das auf diese Weise zu $\alpha \in \Delta$ gehörige fundamental-dominante Gewicht wird manchmal als ℓ_{α} bezeichnet. Die fundamental-dominanten Gewichte bilden eine Basis des Gewichtsgitters.

Genauso wie die Gewichte müssen die dominanten und fundamental-dominanten Gewichte nicht unbedingt Charaktere sein, sondern nur in $X(T)_{\mathbb{Q}}$ liegen.

Der folgende Satz beschreibt eine Bijektion zwischen den dominanten Gewichten und den irreduziblen Darstellungen einer linearen algebraischen Gruppe:

Satz 3.5. *Sei G eine reduktive, zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über einem beliebigen Körper K , deren maximaler Torus T über K zerfällt.*

1. Sei $\phi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung von G . Dann ist genau ein eindimensionaler Unterraum $D \subset V$ stabil unter B . Das Gewicht χ von D (genannt Höchstgewicht von ϕ) ist dominant, und alle andere Gewichte von ϕ sind kleiner als χ .
2. Zu jedem dominanten Gewicht χ , das in $X(T)$ liegt, gibt es bis auf Isomorphie genau eine irreduzible Darstellung, deren Höchstgewicht χ ist. Sie wird als ϕ_χ bezeichnet. Zwei irreduzible Darstellungen sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Höchstgewichte übereinstimmen.

Beweis. Für halbeinfache G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 findet man dieses Resultat in [Bor75], Satz 2.4. Der allgemeine Fall wurde erstmals in [Tit71], Satz 7.2 bewiesen und findet sich auch in [Jan87], II.2.4. \square

Eine irreduzible Darstellung ϕ_χ , deren Höchstgewicht ein gegebenes dominantes Gewicht χ ist, erhält man auf folgende Weise:

Definition 3.6. Sei $\chi \in X(B)$, und sei $G \times_B \mathbb{G}_a = G \times \mathbb{G}_a / \sim$ mit $(g, \chi(b)x) \sim (gb, x)$ für jedes $b \in B$. Dann erhält man durch $\xi_\chi : G \times_B \mathbb{G}_a \rightarrow G/B$ mit $(g, x) \mapsto \bar{g}$ ein Geradenbündel (vgl. Satz 3.8).

Definition 3.7. Für ein Wurzelsystem Φ mit Weylgruppe W gibt es bekanntlich genau ein $w_0 \in W$ mit $w_0(\Phi^+) = -\Phi^+$. Sei

$$i : X(T) \rightarrow X(T), \quad \chi \mapsto -w_0(\chi).$$

Die Abbildung i bildet jede fundamentale Wurzel wieder auf eine fundamentale Wurzel ab, und Entsprechendes gilt für positive Wurzeln und fundamental-dominante, dominante und positive Gewichte. Doch i ist nicht unbedingt die Identität. Ein Beispiel dafür wird in 3.35 gegeben.

Die lineare algebraische Gruppe G operiert auf sich selbst durch Links- und Rechts-translation. Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, induziert die Rechtstranslation r_g eine Linksoperation r_g^* von $G(K)$ auf $K[G]$ und die Linkstranslation l_g eine Rechtsoperation l_g^* von $G(K)$ auf $K[G]$.

Dann definiert $\lambda_g := l_{g^{-1}}^* : f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$ eine Linksoperation λ von $G(K)$ auf $K[G]$.

Satz 3.8. Sei $\chi \in X(B)$. Das oben konstruierte ξ_χ ist ein Geradenbündel.

Falls $\chi|_T$ ein dominantes Gewicht von G ist, gilt über dem Körper K

$$\Gamma(G/B, \xi_{-\chi}) \cong K[G]_\chi := \{f \in K[G] \mid r_b^*(f) = \chi(b) \cdot f \quad \forall b \in B(K)\}.$$

Falls K Charakteristik 0 hat, erhält man durch die Linkstranslation λ auf $K[G]_\chi$ eine irreduzible Darstellung $\phi_{i(\chi)}$ von G mit Höchstgewicht $i(\chi)$.

In positiver Charakteristik wird die Höchstgewichtsdarstellung $\phi_{i(\chi)}$ als Unterdarstellung in $(\lambda, K[G]_\chi)$ von einem Eigenvektor zum Höchstgewicht $i(\chi)$ erzeugt.

Beweis. Durch λ operiert zunächst nicht G , sondern nur die Gruppe der K -rationalen Punkte $G(K)$ auf $\Gamma(G/B, \xi_{-\chi})$. Dass diese Operation von einer Operation von G induziert ist, ist aber klar.

Vgl. [Bor91], 24.4, [Bor75], Prop. 4.5 und [Jan87], II.2.7. Für den Fall $G = \mathbf{PGL}_2(K)$ wird die Aussage in Lemma 3.28 bewiesen.

Die angegebene Charakterisierung von $\Gamma(G/B, \xi_{-\chi})$ ist ein Spezialfall des folgenden Lemmas 3.9. \square

Lemma 3.9. *Sei $U \subset G$ so, dass $UB = U$. Sei $\xi = \xi_{-\chi}$ wie oben. Dann gilt*

$$\Gamma(U/B, \xi) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}) \mid f(ub) = \chi(b)f(u) \quad \forall u \in U, b \in B\}.$$

Beweis. Bekanntlich erhält man zu einem Geradenbündel eine Garbe, indem man die Schnitte auf offenen Mengen betrachtet:

$$\begin{aligned} \Gamma(U/B, \xi) &= \{\bar{\psi} : U/B \rightarrow U \times_B K \mid \xi(\bar{\psi}(\bar{u})) = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in U/B\} \\ &= \{\psi : U \rightarrow U \times_B K \mid \xi(\psi(u)) = \bar{u}, \psi(ub) = \psi(u) \quad \forall u \in U, b \in B\}. \end{aligned}$$

Wegen $\xi((g, x)) = \bar{g}$ muss ψ die Form $\psi(u) = (u, f(u))$ haben. Dabei muss $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ so gewählt sein, dass $\psi(u) = \psi(ub)$ erfüllt ist, d. h.

$$(u, f(u)) = (ub, f(ub)) \Leftrightarrow (u, f(u)) = (u, ((-\chi)(b))f(ub)) \Leftrightarrow \chi(b)f(u) = f(ub).$$

Dass ein mit einem solchen f definiertes ψ tatsächlich ein Schnitt auf U ist, rechnet man leicht nach. \square

Satz 3.10. *Sei (ϕ, V) eine Darstellung von G . Dann ist*

$$(\widehat{\phi}, V^*) \quad \text{mit} \quad \widehat{\phi}(g) : \psi \mapsto \psi \circ \phi(g^{-1})$$

eine Darstellung von G auf V^ mit gleicher Dimension, genannt kontragradiente Darstellung zu ϕ .*

Falls (ϕ, V) irreduzibel mit Höchstgewicht χ ist, dann ist $(\widehat{\phi}, V^)$ irreduzibel mit Höchstgewicht $i(\chi)$.* \blacksquare

Beweis. Vgl. [Bor75], 2.7. \square

Satz 3.11. *Sei G eine reductive lineare algebraische Gruppe über einem Körper K der Charakteristik 0. Zwei endlich-dimensionale Darstellungen (ϕ, V) und (ψ, W) von G , in denen dieselben Gewichte mit gleicher Vielfachheit vorkommen, sind isomorph.*

Beweis. Da K Charakteristik 0 hat, zerlegt sich jede Darstellung von G in eindeutiger Weise in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen. Seien $V = \bigoplus V_i^{n_i}$ und $W = \bigoplus W_j^{m_j}$ diese Zerlegungen.

Angenommen, die Darstellungen V und W sind nicht isomorph. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man davon ausgehen, dass $V_i \neq W_j$ für alle i, j gilt, denn andernfalls könnte man zum Komplement von V_i in V und von W_j in W übergehen.

Unter den Gewichten von V gibt es mindestens ein maximales Element χ . Da das Höchstgewicht jeder irreduziblen Darstellung V_i größer ist als die anderen in V_i vorkommenden Gewichte, muss χ selbst Höchstgewicht einer Darstellung V_i sein.

Da W dieselben Gewichte wie V hat, ist χ auch Höchstgewicht einer Darstellung W_j . Da es aber zu jedem Höchstgewicht bis auf Isomorphie nur eine irreduzible Darstellung gibt, ist V_i isomorph zu W_j , im Widerspruch zur Annahme. \square

3.1.1 Irreduzible Darstellungen unter Körpererweiterungen

Sei G eine reduktive lineare algebraische Gruppe, die über einem beliebigen Körper K der Charakteristik 0 definiert ist und die einen über K definierten und zerfallenden maximalen Torus T hat. Sei L ein Erweiterungskörper von K . In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass sich das Zerlegungsverhalten in irreduzible G -Moduln unter Erweiterung des Grundkörpers nicht ändert.

Bemerkung 3.12. Weil G einen über K definierten und zerfallenden maximalen Torus hat, ist auch die Borelgruppe B von G über K definiert (denn dann sind die in [Spr98], 8.1.1 erwähnten U_α für die über K definierten Wurzeln α ebenfalls über K definiert, und sie erzeugen B), und χ ist genau dann eine (positive oder dominante) Wurzel von G , wenn χ_L eine (positive oder dominante) Wurzel von G_L ist.

Lemma 3.13. *Sei V der irreduzible G -Modul zum Höchstgewicht $\chi \in X(T)$. Dann ist V_L der irreduzible G_L -Modul zum Höchstgewicht $\chi_L \in X(T_L)$.*

Beweis. Betrachte die Beschreibung der irreduziblen Höchstgewichtsdarstellung aus Satz 3.8. Das Höchstgewicht χ ist dominant, und wie oben bemerkt, ist damit auch χ_L dominant. Es gilt $V = K[G]_{i(\chi)}$, und sei $W = L[G]_{i(\chi_L)}$ die irreduzible Darstellung von $G(L)$ zum Höchstgewicht χ_L .

Aus der Definition von $K[G]_{i(\chi)}$ und $L[G]_{i(\chi_L)}$ ergibt sich sofort, dass $V_L \subset W$ gilt. Weil V stabil unter G ist, ist andererseits V_L stabil unter G_L , sodass W nur irreduzibel sein kann, wenn $V_L = W$ gilt. \square

Lemma 3.14. *Sei W eine über L definierte irreduzible Darstellung von G_L . Dann gibt es eine über K definierte irreduzible Darstellung V von G mit $V_L = W$.*

Beweis. Sei χ' das Höchstgewicht von W . Da der maximale Torus T von G über K zerfällt, gilt $X(T) \cong X(T_L)$. Es gibt also ein $\chi \in X(T)$ mit $\chi' = \chi_L$. Für die Höchstgewichtsdarstellung V von G zum Gewicht χ gilt dann nach dem vorhergehenden Lemma $W = V_L$. \square

Satz 3.15. *Sei V ein über K definierter G -Modul, und sei $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ eine Zerlegung von V in irreduzible G -Moduln G_i . Dann zerlegt sich der G_L -Modul V_L als $\bigoplus_{i \in I} (V_i)_L$ in irreduzible G_L -Moduln.*

Sei umgekehrt W ein über L definierter G_L -Modul. Dann gibt es einen G -Modul V mit $V_L = W$ (d. h. W ist ein über K definierter G_L -Modul), und die Zerlegung von W in irreduzible G_L -Moduln ergibt sich in obiger Weise aus der Zerlegung von V in irreduzible G -Moduln.

Beweis. Offensichtlich gilt $V_L = \bigoplus_{i \in I} (V_i)_L$, und nach Lemma 3.13 sind alle $(V_i)_L$ irreduzibel. Damit gilt die erste Behauptung.

Sei $W = \bigoplus_{j \in J} W_j$ eine Zerlegung von W in irreduzible G_L -Moduln W_j . Dann hat jedes W_j nach Lemma 3.14 die Form $(V_j)_L$ für einen irreduziblen G -Modul V_j , und $V = \bigoplus_{j \in J} V_j$ ist offenbar die gesuchte Zerlegung. \square

3.1.2 Kohomologie der Geradenbündel auf \mathbb{P}_K^1

In der Beschreibung der Kohomologie des Geradenbündels ξ_χ (vgl. Definition 3.6) wird die Kohomologie von Geradenbündeln auf \mathbb{P}_K^1 eine Rolle spielen.

Für ein Schema X bezeichnet $\text{Pic } X$ wie in [Har77], II.6 die *Picard-Gruppe* der invertierbaren Garben oder Geradenbündel auf X .

Lemma 3.16. *Sei $X = \mathbb{P}_K^1$. Es gilt $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}$, wobei $l \in \mathbb{Z}$ der invertierbaren Garbe $\mathcal{O}(l)$ entspricht.*

Für $i \notin \{0, 1\}$ gilt $H^i(X, \mathcal{O}(l)) = 0$. Für $l \geq 0$ gilt $\dim H^0(X, \mathcal{O}(l)) = l + 1$ und $H^1(X, \mathcal{O}(l)) = 0$. Für $l < 0$ gilt $H^0(X, \mathcal{O}(l)) = 0$ und $\dim H^1(X, \mathcal{O}(l)) = -l - 1$.

Beweis. Die erste Aussage wird in [Har77], II.6.17 bewiesen, und die Aussagen über $H^0(X, \mathcal{O}(l))$ sind trivial. Da X Dimension 1 hat, folgt die zweite Aussage aus [Har77], II.2.7.

Für beliebige invertierbare Garben \mathcal{L} auf X gilt nach der Serre-Dualität (vgl. [Har77], III.7.1) $H^0(X, \mathcal{L}) \cong H^1(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \omega_X)^*$, wobei ω_X die kanonische Garbe auf X ist. Bekanntlich gilt $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-2)$ für $X = \mathbb{P}^1$. Für $\mathcal{L} = \mathcal{O}(l)$ erhält man also

$$H^0(X, \mathcal{O}(l)) \cong H^1(X, \mathcal{O}(l)^{-1} \otimes \mathcal{O}(-2))^* \cong H^1(X, \mathcal{O}(-l-2))^*$$

und damit $\dim H^1(X, \mathcal{O}(l)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(-l-2))$. \square

3.2 Zerlegung der regulären Darstellung

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0. Die Darstellung von G , die sich durch Operation von G durch Rechtstranslation auf $K[G]$, der Algebra der regulären Funktionen auf G , ergibt, wird *rechts-reguläre Darstellung* (im Folgenden auch kurz *reguläre Darstellung*) genannt (vgl. auch Abschnitt 1.3).

Definition 3.17. Sei B eine Borelgruppe in G , die einen maximalen Torus T enthält. Sei (ϕ, V) eine beliebige endlich-dimensionale Darstellung von G . Jeder Charakter $\chi \in X(T)$ lässt sich in eindeutiger Weise auf B fortsetzen. Der Vektorraum

$$V_\chi^B = \{v \in V \mid \phi(b)(v) = \chi(b) \cdot v \quad \forall b \in B\}$$

heißt *Borel-Eigenraum zum Gewicht χ* , falls er ungleich $\{0\}$ ist, und ein $v \in V_\chi^B \setminus \{0\}$ heißt *Borel-Eigenvektor zum Gewicht χ* (kurz: χ - B -Eigenvektor).

In folgender Weise ist die Zerlegung in irreduzible Darstellungen mit den Borel-Eigenräumen kompatibel:

Lemma 3.18. Sei (ϕ, V) eine Darstellung von G , und sei $(\phi, V) = \bigoplus(\phi_i, V_i)$ eine Zerlegung von (ϕ, V) in irreduzible Darstellungen zu den Höchstgewichten χ_i .

Dann gilt $V_\chi^B = \bigoplus(V_i \cap V_\chi^B)$.

Beweis. Sei v ein Borel-Eigenvektor zum Gewicht χ , und sei $v = \sum v_i$ mit $v_i \in V_i$. Weil v ein χ - B -Eigenvektor ist, gilt

$$\sum(\phi_i(b)(v_i)) = \phi(b)(v) = \chi(b)v = \sum(\chi(b) \cdot v_i) \quad \text{für jedes } b \in B,$$

also $\phi_i(b)(v_i) = \chi(b) \cdot v_i$, d. h. $v_i \in V_i \cap V_\chi^B$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.19. Sei $\bigoplus(\phi_i, V_i)$ eine Zerlegung der Darstellung (ϕ, V) in irreduzible Komponenten, und sei n die Dimension des B -Eigenraums V_χ^B zu einem dominanten Gewicht χ . Dann kommt die Darstellung zum Höchstgewicht χ genau n -mal in der Zerlegung vor.

Beweis. Nach Satz 3.5 gibt es in jedem V_i nur zum Höchstgewicht χ_i Borel-Eigenvektoren, und diese bilden jeweils einen eindimensionalen Unterraum.

Betrachtet man also die Zerlegung $V_\chi^B = \bigoplus(V_i \cap V_\chi^B)$ nach dem vorherigen Lemma, erhält man nur eindimensionale Komponenten, und zwar genau in den irreduziblen Darstellungen mit Höchstgewicht $\chi_i = \chi$. Die Anzahl dieser eindimensionalen Komponenten stimmt also einerseits mit der Vielfachheit der irreduziblen Darstellung zum Höchstgewicht χ und andererseits mit der Dimension von V_χ^B überein. \square

Satz 3.20. Zerlegt man die rechts-reguläre Darstellung von G in irreduzible Darstellungen, dann kommt jede irreduzible Darstellung ϕ in dieser Zerlegung vor, und die Vielfachheit von ϕ in ihr ist gleich der Dimension der Darstellung ϕ .

Beweis. Sei χ das Höchstgewicht einer beliebigen irreduziblen Darstellung ϕ , und betrachte dazu $K[G]_\chi$ aus Satz 3.8.

Die Dimension von $K[G]_\chi$ ist nach Satz 3.8 die Dimension der irreduziblen Darstellung zum Höchstgewicht $i(\chi)$. Diese stimmt nach Satz 3.10 mit der Dimension von ϕ zum Höchstgewicht χ überein.

Andererseits ist $K[G]_\chi$ offensichtlich auch der Raum V_χ^B der rechts-regulären Darstellung, und nach Lemma 3.19 stimmt die Dimension von V_χ^B mit der Vielfachheit der Darstellung zum Höchstgewicht χ überein. \square

Bemerkung 3.21. Falls die Charakteristik p von K positiv ist, stimmt Satz 3.20 nicht. Die Vielfachheit der Darstellung zum Höchstgewicht χ stimmt zwar weiterhin mit der Dimension von $K[G]_\chi$ überein, aber die irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $i(\chi)$ kann in positiver Charakteristik eine echte Unterdarstellung von $K[G]_\chi$ sein.

Beispiel 3.37 zeigt das im Fall \mathbf{PGL}_2 .

3.3 Darstellungen in Charakteristik $p > 0$

In diesem Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Die Darstellungstheorie für lineare algebraische Gruppen über solchen Körpern wird in [Ste63] entwickelt, in [Bor75], §4 zusammengefasst sowie in [Jan87], II.3 ausführlich erklärt.

Im Gegensatz zur Charakteristik 0 zerfällt nicht jede Darstellung einer reduktiven linearen algebraischen Gruppe G in eine direkte Summe irreduzibler Untermoduln. Zwar gilt die Bijektion zwischen irreduziblen G -Moduln und dominanten Gewichten, aber der in Satz 3.8 beschriebene Modul $K[G]_\chi$ ist nicht unbedingt irreduzibel. Immerhin gilt:

Satz 3.22. *Der G -Modul $K[G]_\chi$ enthält genau eine irreduzible Unterdarstellung. Diese wird durch Operation von G auf dem Eigenraum zum Gewicht $i(\chi)$ erzeugt und ist die irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $i(\chi)$, genannt $\phi_{i(\chi)}$.*

Beweis. [Jan87], II.2.3. Dabei ist zu beachten, dass dort B genannt wird, was hier mit $w_0 B w_0^{-1}$ bezeichnet würde. Der dort verwendete Modul $H^0(\chi)$, der Höchstgewicht χ hat, stimmt also nicht ganz mit $K[G]_\chi$ mit Höchstgewicht $i(\chi)$ überein. Vgl. auch [Bor75], Prop. 4.5. \square

Sei K ein perfekter Körper der Charakteristik p . Sei G/K eine lineare algebraische Gruppe, die bereits über \mathbb{F}_p definiert ist, d. h. $G = G' \times_{\mathbb{F}_p} K$ für eine geeignete lineare algebraische Gruppe G'/\mathbb{F}_p .

Die Zerlegung $K[G] = \mathbb{F}_p[G'] \otimes_{\mathbb{F}_p} K$ ergibt den Frobenius-Endomorphismus F (vgl. [Jan87], I.9.2) auf G , definiert durch

$$F^* : K[G] \rightarrow K[G], \quad f \otimes c \mapsto f^p \otimes c \quad \text{mit } f \in \mathbb{F}_p[G'], c \in K.$$

Die Abbildung F^* ist wohldefiniert, denn es gilt $f^p \otimes \beta c = (\beta f)^p \otimes c$ wegen $\beta^p = \beta$ für $\beta \in \mathbb{F}_p$. Außerdem ist F^* tatsächlich ein Algebren-Endomorphismus, denn F^* ist additiv, weil $(f + g)^p = f^p + g^p$ in Charakteristik $p > 0$ gilt, und offensichtlich multiplikativ und K -linear.

Folgendermaßen induziert F eine Operation auf den K -rationalen Punkten von G : Sei G über K in irgendeiner Weise als abgeschlossene Untergruppe in \mathbf{GL}_n/K eingebettet (vgl. [Hum75], 8.6). Ein K -rationaler Punkt ist dann einerseits gegeben durch ein Element $\alpha \in \mathbb{M}_n(K)$, das die G definierenden Gleichungen erfüllt, und andererseits durch einen Homomorphismus $\phi = \alpha^* : K[G] \rightarrow K$, wobei man ϕ als Auswertung der Funktionen auf G in α erhält: $f \otimes c \mapsto c \cdot f(\alpha)$.

Lemma 3.23. *Der Frobenius-Endomorphismus F auf G induziert nach einer beliebigen Einbettung von G in \mathbf{GL}_n auf den K -rationalen Punkten die Abbildung*

$$\alpha = (\alpha_{i,j}) \mapsto \alpha^p := (\alpha_{i,j}^p),$$

die die Einträge der Matrix α komponentenweise potenziert.

Beweis. Sei $\alpha : \text{Spec } K \rightarrow G$ ein K -rationaler Punkt auf G . Wegen $F(\alpha) = F \circ \alpha$ gilt $(F(\alpha))^* = \alpha^* \circ F^*$, und damit

$$(F(\alpha))^*(f \otimes c) = \alpha^*(F^*(f \otimes c)) = \alpha^*(f^p \otimes c) = c \cdot f^p(\alpha) = c \cdot f(\alpha^p) = (\alpha^p)^*(f \otimes c).$$

Dabei gilt $f^p(\alpha) = f(\alpha^p)$, weil f ein Polynom mit Koeffizienten in \mathbb{F}_p ist. \square

Sei (ϕ, V) eine Darstellung von G . Dann operiert G auch durch $\phi^{[r]} := \phi \circ F^r$ auf V , und diese Darstellung wird als $(\phi^{[r]}, V^{[r]})$ bezeichnet. Falls (ϕ, V) irreduzibel ist, dann ist auch $(\phi^{[r]}, V^{[r]})$ irreduzibel.

Jedes dominante Gewicht χ lässt sich eindeutig als Linearkombination der fundamental-dominanten Gewichte $\ell_\alpha \in X(T)_\mathbb{Q}$ ($\alpha \in \Delta$, vgl. Definition 3.4) mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_0^+ schreiben: $\chi = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \ell_\alpha$. Sei $X(T)_1$ die Menge der Gewichte in $X(T)$, bei denen die Koeffizienten in dieser Darstellung $0 \leq n_\alpha < p$ erfüllen.

Satz 3.24 (Steinberg). *Seien $\chi_0, \dots, \chi_m \in X(T)_1$, und sei $\chi = \sum_{i=0}^m p^i \chi_i$. Dann gilt für die Höchstgewichtsdarstellungen zu diesen Charakteren*

$$\phi_\chi = \bigotimes_{i=0}^m \phi_{\chi_i}^{[i]}.$$

Beweis. Vgl. [Ste63] oder [Jan87], II.3.17. □

Falls G halbeinfach ist, liegen die fundamental-dominanten Gewichte in $X(T)$, und jedes Gewicht χ hat die in Satz 3.24 angegebene Form. Die Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen von G beschränkt sich dann im Wesentlichen auf die Bestimmung der p^r Darstellungen zu den Gewichten aus $X(T)_1$, wobei r der Rang von G sei. Falls G nicht halbeinfach ist, erhält man nicht unbedingt alle irreduziblen Darstellungen auf diese Weise (vgl. Bemerkung 3.39).

3.4 Beispiele

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Phänomene in der Darstellungstheorie reductiver linearer algebraischer Gruppen illustriert werden. In den betrachteten Beispielen ist es möglich und sinnvoll, die Abbildungen und Operationen punktweise zu betrachten, auch wenn eine Darstellung im Grunde ein Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen $G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ ist, der die punktweise Operation $g \cdot v$ für $g \in G(K)$ und $v \in V$ nur induziert.

Für die weitere Verwendung werden nun Borelgruppen von \mathbf{GL}_2 und \mathbf{PGL}_2 bestimmt.

Lemma 3.25. *Sei $G = \mathbf{GL}_2/K$. Dann bilden die oberen Dreiecksmatrizen eine Borelgruppe B in G , und es gilt $G/B = \mathbb{P}_K^1$.*

Beweis. Bekanntlich ist die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen eine Borelgruppe in \mathbf{GL}_2 . Nach [Bor91], 11.1 existiert der Quotient und ist projektiv.

Definiere die Abbildung $\phi : \mathbf{GL}_2(K) \rightarrow \mathbb{P}_K^1(K)$ durch $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto [x_1 : x_3]$. Offensichtlich ist ϕ surjektiv, und das Urbild von $[1 : 0]$ ist genau B . □

Lemma 3.26. *Mit B wie im obigen Lemma 3.25 ist $B' := B/\mathbb{G}_m$ eine Borelgruppe von $G' = \mathbf{PGL}_2/K$, und es gilt $G'/B' = \mathbb{P}_K^1$.*

Beweis. Dass B' eine Borelgruppe in \mathbf{PGL}_2 ist, ist klar. Damit gilt

$$G'/B' = (\mathbf{GL}_2/\mathbb{G}_m)/(B/\mathbb{G}_m) = \mathbf{GL}_2/B = \mathbb{P}_K^1. \quad \square$$

3.4.1 Kohomologie von $\xi_{-\chi}$ für \mathbf{PGL}_2

Im Fall \mathbf{PGL}_2 lässt sich für das in Satz 3.8 vorkommende $\xi_{-\chi}$ direkt zeigen, dass es ein Geradenbündel ist, und die Kohomologie von $\xi_{-\chi}$ kann man mit elementaren Methoden explizit beschreiben.

Sei $G = \mathbf{PGL}_2/K$, B die in Lemma 3.26 definierte Borelgruppe von G und T der zugehörige maximale Torus.

Bemerkung 3.27. Jeder Charakter $\chi \in X(T)$ hat die Form $t = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix} \mapsto (\frac{t_1}{t_4})^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und setzt sich auf B durch $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \mapsto (\frac{b_1}{b_4})^k$ eindeutig fort (vgl. [Spr98], 7.3.6). Die Fortsetzung wird ebenfalls als χ bezeichnet. Der Charakter $\chi : t \mapsto (\frac{t_1}{t_4})^k$ wird auch kurz als k oder $(k, -k)$ bezeichnet.

Wie in Definition 3.6 sei $G \times_B \mathbb{G}_a = G \times \mathbb{G}_a / \sim$ mit $(g, \chi(b)x) \sim (gb, x)$ für $b \in B$ und $\xi_\chi : G \times_B \mathbb{G}_a \rightarrow G/B$ mit $(g, x) \mapsto \bar{g}$.

Lemma 3.28. *Für $G = \mathbf{PGL}_2/K$ und χ wie in Bemerkung 3.27 ist $\xi = \xi_{-\chi}$ ein Geradenbündel.*

Beweis. Zunächst ist ξ wohldefiniert: $\xi((gb, \chi(b)x)) = \overline{gb} = \bar{g} = \xi((g, x)) \in G/B$. Außerdem ist ξ lokal trivial: Für $j = 1, 3$ wähle $U_j := \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_j \neq 0 \}$. Die Mengen U_1 und U_3 bilden eine offene Überdeckung von G .

Mit $\psi((\bar{u}, x)) := \bar{u}$ und $\phi(u, x) := (\bar{u}, (\frac{u_1^2}{\det u})^{-k}x)$ erhält man folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times_B \mathbb{G}_a & \xrightarrow{\phi} & U_1/B \times \mathbb{G}_a \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U_1/B & \xlongequal{\quad} & U_1/B \end{array}$$

Dabei ist ϕ wohldefiniert, denn

$$\begin{aligned} \phi(ub, \chi(b)x) &= (\overline{ub}, (\frac{(u_1 b_1)^2}{\det(ub)})^{-k} (\frac{b_1}{b_4})^k x) = (\bar{u}, (\frac{u_1^2 b_1^2}{\det(u) b_1 b_4})^{-k} (\frac{b_1}{b_4})^k x) \\ &= (\bar{u}, (\frac{u_1^2}{\det u})^{-k} x) = \phi(u, x), \end{aligned}$$

und das Diagramm kommutiert, denn

$$(\psi \circ \phi)(u, x) = \psi(\bar{u}, (\frac{u_1^2}{\det u})^{-k} x) = \bar{u} = \xi(u, x).$$

Also ist ξ lokal trivial auf U_1 .

Analog erhält man, dass ξ lokal trivial auf U_3 ist, und ξ ist ein Geradenbündel. \square

Zur Erinnerung: Sei $U \subset G$ so, dass $UB = U$. Dann nach gilt Lemma 3.9

$$\Gamma(U/B, \xi) = \{ f \in \Gamma(U, \mathcal{O}) \mid f(ub) = \chi(b)f(u) \quad \forall u \in U \}.$$

Lemma 3.29. *Sei $\chi(b) = (\frac{b_1}{b_4})^k$ und $\xi = \xi_{-\chi}$ wie oben. Falls $k \geq 0$, dann gilt für die Kohomologie $\dim(H^0(G/B, \xi)) = 2k + 1$ und $H^1(G/B, \xi) = 0$. Falls $k < 0$, gilt $H^0(G/B, \xi) = 0$ und $\dim(H^1(G/B, \xi)) = -2k - 1$.*

Beweis. Die Kohomologie von ξ lässt sich mit Hilfe der Čech-Kohomologie bestimmen. Dabei wählt man eine Überdeckung mit offenen Mengen, auf denen ξ trivial ist.

Die Garbenkohomologie von ξ stimmt nach [Har77], Satz III.4.5 mit der Čech-Kohomologie bzgl. $\mathfrak{U} = \{U_1/B, U_3/B\}$ überein. Ihre Berechnung erfolgt in mehreren Schritten.

1. *Offene Überdeckung und Čech-Komplex.*

Mit dem Isomorphismus $G/B \cong \mathbb{P}_K^1$ (durch $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mapsto [x_1 : x_3]$) aus Lemma 3.26 erhält man $U_1/B \cong \mathbb{P}_K^1 \setminus \{[0 : 1]\}$ und $U_3/B \cong \mathbb{P}_K^1 \setminus \{[1 : 0]\}$.

Es gilt $U_{13}/B := U_1/B \cap U_3/B \cong \mathbb{P}_K^1 \setminus \{[1 : 0], [0 : 1]\}$. Man hat

$$C^1(\mathfrak{U}, \xi) = \Gamma(U_{13}/B, \xi), \quad C^0(\mathfrak{U}, \xi) = \Gamma(U_1/B, \xi) \oplus \Gamma(U_3/B, \xi),$$

und $d_0 : C^0 \rightarrow C^1$ ist definiert durch $(\alpha_1, \alpha_3) \mapsto \alpha_3|_{U_{13}/B} - \alpha_1|_{U_{13}/B}$. Alle anderen d_i und C^i im Čech-Komplex sind trivial.

Es gilt $\Gamma(G/B, \xi) = H^0(\mathfrak{U}, \xi) = \ker(d_0)/\text{im}(d_{-1}) = \ker(d_0)$ und außerdem $H^1(G/B, \xi) = H^1(\mathfrak{U}, \xi) = \ker(d_1)/\text{im}(d_0) = \Gamma(U_{13}/B, \xi)/\text{im}(d_0)$.

2. *Berechnung der Schnitte.*

Die Schnitte des trivialen Geradenbündels $\psi : U_1/B \times \mathbb{G}_a \rightarrow U_1/B$ sind gegeben durch reguläre Funktionen $f \in \Gamma(U_1/B, \mathcal{O}_{U_1/B})$. Aus dem Isomorphismus $i : U_1/B \rightarrow \mathbb{G}_a, \bar{u} \mapsto \frac{u_3}{u_1}$ erhält man $i^* : \mathcal{O}_{\mathbb{G}_a} \rightarrow \mathcal{O}_{U_1/B}$ mit $f \mapsto i^*(f) = f \circ i$, und damit gilt $\Gamma(U_1/B, \mathcal{O}_{U_1/B}) = \{f(\frac{u_3}{u_1}) \mid f \in \mathcal{O}_{\mathbb{G}_a} = K[x]\}$.

Diese regulären Funktionen geben durch

$$\tilde{f} : U_1/B \rightarrow U_1/B \times \mathbb{G}_a, \quad \bar{u} \mapsto (\bar{u}, f(\frac{u_3}{u_1}))$$

Schnitte. Zusammen mit

$$\phi^{-1} : U_1/B \times \mathbb{G}_a \rightarrow U_1 \times_B \mathbb{G}_a, \quad (\bar{u}, x) \mapsto (u, (\frac{u_1^2}{\det u})^k x)$$

erhält man: Die Schnitte von ξ auf U_1 haben die Form

$$\phi^{-1} \circ \tilde{f} : U_1/B \rightarrow U_1 \times_B \mathbb{G}_a, \quad \bar{u} \mapsto (u, (\frac{u_1^2}{\det u})^k f(\frac{u_3}{u_1})) \text{ mit } f \in K[x]$$

und sind offenbar durch die Abbildung $\hat{f} : \bar{u} \mapsto (\frac{u_1^2}{\det u})^k f(\frac{u_3}{u_1})$ bestimmt.

U_{13}/B ist mittels $j : \bar{u} \mapsto \frac{u_3}{u_1}$ zu $\mathbb{G}_a \setminus \{0\}$ isomorph. Da das die prinzipal-offene Menge $D(x)$ mit $x \in K[x]$ ist, gilt $\Gamma(D(x), \mathcal{O}_{D(x)}) = K[x]_x = K[x, x^{-1}]$. Mit $j^* : \mathcal{O}_{D(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{U_{13}/B}$ erhält man $\Gamma(U_{13}/B, \mathcal{O}_{U_{13}/B}) = \{f(\frac{u_3}{u_1}) \mid f \in K[x, x^{-1}]\}$.

Mit ψ^{-1} wie oben werden die Schnitte von ξ auf U_{13} von Funktionen der Form $\hat{f} : \bar{u} \mapsto (\frac{\det u}{u_1^2})^{-k} f(\frac{u_3}{u_1})$ mit $f \in K[x, x^{-1}]$ bestimmt.

Wie oben sind es für U_1 Funktionen derselben Form, aber mit $f \in K[x]$, und analog erhält man für U_3 Funktionen der Form $\hat{f} : \bar{u} \mapsto (\frac{\det u}{u_3^2})^{-k} f(\frac{u_1}{u_3})$ mit $f \in K[x]$.

Als K -Vektorraum wird also $\Gamma(U_1/B, \xi)$ von $\{(\det u)^{-k} \cdot u_3^n \cdot u_1^{-n+2k} \mid n \in \mathbb{Z}_0^+\}$, $\Gamma(U_3/B, \xi)$ von $\{(\det u)^{-k} \cdot u_1^n \cdot u_3^{-n+2k} \mid n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ und $\Gamma(U_{13}/B, \xi)$ von $\{(\det u)^{-k} \cdot u_3^n \cdot u_1^{-n+2k} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ erzeugt.

3. Sei $k \geq 0$. Dann liegt

$$((\det u)^{-k} u_1^j u_3^{-j+2k}, (\det u)^{-k} u_3^{-j+2k} u_1^{-(j+2k)+2k}) \in C^0(\mathfrak{U}, \xi)$$

für $j \in \{0, \dots, 2k\}$ in $\ker(d_0)$. Damit hat $H^0(G/B, \xi)$ die Dimension $2k+1$. Wegen $(\Gamma(U_1/B, \xi)|_{U_{13}/B}) \cup (\Gamma(U_3/B, \xi)|_{U_{13}/B}) = \Gamma(U_{13}/B, \xi)$ gilt $\text{im}(d_0) = \Gamma(U_{13}/B, \xi)$ und damit $H^1(G/B, \xi) = \Gamma(U_{13}/B, \xi) / \text{im}(d_0) = 0$.

4. Für $k < 0$ gilt $\Gamma(U_1/B, \xi) \cap \Gamma(U_3/B, \xi) = \{0\}$ und daher $H^0(G/B, \xi) = \ker(d_0) = 0$. Die Erzeuger

$$(\det u)^{-k} \cdot u_1^n \cdot u_3^{-n+2k} \quad \text{von } \Gamma(U_{13}/B, \xi)$$

sind für $n \geq 0$ genau die Einschränkungen der Erzeuger von $\Gamma(U_1/B, \xi)$ und für $n \leq 2k$ genau die Einschränkungen der Erzeuger von $\Gamma(U_3/B, \xi)$. Damit sind diese Elemente für $2k < n < 0$ Repräsentanten von $\Gamma(U_{13}/B, \xi) / \text{im}(d_0)$, und $H^1(G/B, \xi)$ ist $-2k - 1$ -dimensional. \square

Alternativ kann man die Kohomologie auch bestimmen, indem man ausnutzt, dass es auf \mathbb{P}_K^1 nur verhältnismäßig einfache Geradenbündel gibt, deren Kohomologie sich mit Hilfe der Serre-Dualität berechnen lässt. Von den Berechnungen aus Lemma 3.29 muss dann nur noch ein kleiner Teil durchgeführt werden:

Lemma 3.30. Sei $\xi = \xi_{-\chi}$ weiterhin das Geradenbündel zum Charakter $\chi : b \mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ b_4 \end{pmatrix}^k$. Dann gilt $\xi \in \mathcal{O}(2k) \in \text{Pic}(\mathbb{P}_K^1)$, und

$$\dim H^i(G/B, \xi) = \begin{cases} 2k + 1, & i = 0, k \geq 0, \\ -2k - 1, & i = 1, k < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wegen Lemma 3.16 muss ξ die Form $\mathcal{O}(l)$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ haben.

Für $l \geq 0$ bilden die globalen Schnitte $\Gamma(\mathbb{P}_K^1, \mathcal{O}(l))$ einen Vektorraum der Dimension $l+1$. Da $\dim(H^0(G/B, \xi)) = 2k+1$ für $k \geq 0$ gilt, wie in Lemma 3.29 bewiesen wurde, muss in diesem Fall $\xi \cong \mathcal{O}(2k)$ gelten.

Da Tensorieren in der Picard-Gruppe von \mathbb{P}_K^1 mit der Addition in $X(T)$ im Sinne von $\xi_\chi \otimes \xi_{\chi'} \cong \xi_{\chi+\chi'}$ kompatibel ist, gilt $\xi \cong \mathcal{O}(2k)$ auch für $k < 0$.

Die Aussagen über die Kohomologie ergeben sich dann direkt aus Lemma 3.16. \square

Bemerkung 3.31. Lemma 3.30 ist ein Spezialfall vom Satz von Borel-Bott-Weil (vgl. [Jan87], Korollar zu Prop. II.5.4) und enthält außerdem Kempfs Verschwindungssatz (vgl. [Jan87], Prop. II.4.6) für den Fall $G = \mathbf{PGL}_2$.

3.4.2 Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 in Charakteristik 0

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt bestimmten Kohomologie des Geradenbündels $\xi_{-\chi}$ lassen sich auf einfache Weise alle irreduziblen Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 bestimmen. In diesem Fall kann man den Koordinatenring direkt in irreduzible Darstellungen zerlegen, was ein Spezialfall von Satz 3.20 ist.

Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Der folgende Satz beschreibt die irreduziblen Darstellungen von \mathbf{PGL}_2/K mit der in Bemerkung 3.27 eingeführten Bezeichnung k für den Charakter $\chi : t \mapsto \begin{pmatrix} t & 1 \\ & t^4 \end{pmatrix}^k$:

Satz 3.32. *Für jedes $k \in \mathbb{Z}_0^+$ erhält man eine irreduzible Darstellung der Dimension $2k + 1$ von $G = \mathbf{PGL}_2/K$: die Funktionen $\widehat{f} \in K[G]$, deren Zähler ein homogenes Polynom in x_1, x_3 vom Grad $2k$ und deren Nenner $(\det x)^k$ ist, mit Operation von G durch Linkstranslation. Diese Darstellung sei mit ϕ_k bezeichnet.*

Das höchste Gewicht dieser Darstellung ist k , und außerdem kommen die Gewichte $-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k - 1$ jeweils genau einmal vor.

Alle irreduziblen Darstellungen haben diese Form.

Beweis. Wie in den Sätzen 3.5 und 3.8 beschrieben, besagt die allgemeine Theorie, dass es eine Bijektion zwischen den irreduziblen Darstellungen einer linearen algebraischen Gruppe und den dominanten Gewichten gibt, wobei zum Gewicht χ die Darstellung $\Gamma(G/B, \xi_{-\chi})$ gehört, die in Kapitel 3.4.1 beschrieben wurde. Das höchste Gewicht dieser Darstellung ist wiederum χ , weil die in Satz 3.8 erwähnte Funktion i auf der Weylgruppe im hier vorliegenden Fall des Wurzelsystems A_1 die Identität ist.

Wie in Lemma 3.29 berechnet wurde, ist $\Gamma(G/B, \xi)$ für $\chi : b \mapsto \begin{pmatrix} b & 1 \\ & b^4 \end{pmatrix}^k$ die Menge der Funktionen der Form $\widehat{f} : \bar{g} \mapsto \left(\frac{x_1^2}{\det x}\right)^k f\left(\frac{x_3}{x_1}\right)$, wobei $\deg f \leq 2k$ gilt. Das sind genau die im Satz angegebenen Funktionen.

Dass $f(x) = (\det x)^{-k} \cdot x_1^{k+l} x_3^{k-l}$ genau den Gewichtsraum der Dimension 1 zum Gewicht l erzeugt ($l = -k, \dots, k$), rechnet man leicht nach. \square

Da K Charakteristik 0 hat, zerfällt jede Darstellung von G in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Man betrachte die Operation von G durch Rechtstranslation auf $K[G]$, wobei gilt:

$$\begin{aligned} K[G] &= \{\tilde{f} \in K[\mathbf{GL}_2] \mid \tilde{f} \text{ stabil unter Linkstranslation mit } K^*\} \\ &= \{D^k f \mid f \in K[x_1, \dots, x_4] \text{ homogen von Grad } 2k, D = (\det x)^{-1}, k \in \mathbb{Z}_0^+\}. \end{aligned}$$

Dabei wurde $K[G]$ mit $\mathbf{PGL}_2 = \mathbf{GL}_2/\mathbb{G}_m$ nach [Bor91], Prop. 6.5 bestimmt.

Im folgenden Lemma wird die Zerlegung des Koordinatenringes unabhängig vom allgemeinen Resultat in Satz 3.20 direkt berechnet:

Lemma 3.33. *Sei Ψ die Operation von $G = \mathbf{PGL}_2/K$ durch Rechtstranslation auf $K[G]$, sei Ψ_k die Einschränkung von Ψ auf*

$$K[G]_{\deg 2k} := \{D^k f \mid f \in K[x_1, \dots, x_4] \text{ homogen von Grad } 2k, D = (\det x)^{-1}\}.$$

Dann gilt $\Psi_k = \bigoplus_{j=0}^k \phi_j^{2j+1}$ und $\Psi = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \phi_j^{2j+1}$. Jede irreduzible Darstellung ϕ_j kommt also in Ψ vor, und die Vielfachheit von ϕ_j ist die Dimension von ϕ_j .

Beweis. Dass $K[G]_{\deg 2k}$ unter Rechtstranslation stabil ist, ist offensichtlich.

Die Elemente der Form $f = D^k x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} x_4^{l_4}$ mit $\sum l_i = 2k$ bilden eine Basis von $K[G]_{\deg 2k}$ als K -Vektorraum. Zur Bestimmung der Gewichte der Darstellung Ψ_k betrachtet man die Rechtstranslation mit Elementen des in Lemma 2.14 beschriebenen maximalen Torus. Für $t = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix} \in T/\mathbb{G}_m$ gilt

$$\begin{aligned} r_t^* f(x) &= f(xt) = f\left(\begin{bmatrix} t_1 x_1 & t_4 x_2 \\ t_1 x_3 & t_4 x_4 \end{bmatrix}\right) \\ &= (t_1^{-1} t_4^{-1} D)^k (t_1 x_1)^{l_1} (t_4 x_2)^{l_2} (t_1 x_3)^{l_3} (t_4 x_4)^{l_4} \\ &= t_1^{l_1 + l_3 - k} t_4^{l_2 + l_4 - k} f(x) \\ &= \left(\frac{t_1}{t_4}\right)^{l_1 + l_3 - k} f(x). \end{aligned}$$

Da es $(k+j+1)(k-j+1)$ Möglichkeiten gibt, l_1, \dots, l_4 so zu wählen, dass $l_1 + l_3 - k = j$ gilt, hat der Gewichtsraum zum Gewicht j die Dimension $(k+1)^2 - j^2$ (für $j = -k, \dots, k$).

Der Gewichtsraum zum höchsten Gewicht k hat also Dimension $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Daher erhält man eine Zerlegung $\Psi_k = \phi_k^{2k+1} \oplus \Psi'_k$, und die Vielfachheit eines Gewichts j in Ψ'_k ist die Vielfachheit von j in Ψ_k abzüglich seiner Vielfachheit in ϕ_k^{2k+1} , also $((k+1)^2 - j^2) - (2k+1) = k^2 - j^2$.

Die Vielfachheit des höchsten Gewichts $k-1$ von Ψ'_k ist also $k^2 - (k-1)^2 = 2(k-1) + 1$, und per Induktion beweist man die Behauptung über Ψ_k .

Da sich jedes $f \in K[G]_j$ durch Erweiterung mit Potenzen von $\det x$ auch als Element von $K[G]_{j'}$ für $j' > j$ schreiben lässt, gilt $K[G]_j \subset K[G]_{j'}$. Damit gilt $K[G] = \varinjlim K[G]_j$, woraus man die Aussage über Ψ erhält. \square

So wie es bei einer linearen algebraischen Gruppe G eine Bijektion zwischen den dominanten Gewichten und den irreduziblen Darstellungen gibt, stehen auch die irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra \mathfrak{g} in Bijektion zu den dominanten Gewichten von \mathfrak{g} . Zu jedem dominanten Gewicht von G hat man ein dominantes Gewicht von \mathfrak{g} ; die Umkehrung gilt allerdings nicht. Vgl. [Bor91], 24.3.

Beispiel 3.34. Im Fall von $G = \mathbf{PGL}_2/K$ haben die positiven Gewichte die Form $\chi_k : t \mapsto \left(\frac{t_1}{t_4}\right)^k$ für $k \in \mathbb{Z}^+$. Das zugehörige Gewicht von $\mathfrak{pgl}_2(K)$ ist $t \mapsto k(t_1 - t_4)$. Wie in Lemma 2.22 bestimmt, erhält man für jedes $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^+$ ein dominantes Gewicht, zu dem es also im Fall von nicht-ganzzahligem k kein Gewicht von G gibt.

Eine irreduzible zweidimensionale Darstellung V von $\mathfrak{sl}_2(K)$ ist durch

$$x \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2, x_3 y_1 + x_4 y_2) \text{ für } x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(K), (y_1, y_2) \in V \cong K^2$$

definiert. Wegen $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & -t_1 \end{pmatrix} \cdot (y_1, y_2) = (t_1 y_1, -t_1 y_2)$ hat diese Darstellung die Gewichte $\chi_1 : t \mapsto t_1$ und $\chi_{-1} : t \mapsto -t_1$. Alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(K)$ haben die Form $S^l V$, $l \in \mathbb{Z}_0^+$ (vgl. [Ser92], VII.4, Bem. 3), d. h. sie sind das l -fache symmetrische Tensorprodukt der Darstellung V .

Zusammen mit dem Isomorphismus $\phi : \mathfrak{pgl}_2(K) \rightarrow \mathfrak{sl}_2(K)$ aus Bemerkung 2.15 wird V zum $\mathfrak{pgl}_2(K)$ -Modul, und es gilt

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix} (y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}(t_1 - t_4) \quad 0 \\ 0 \quad \frac{1}{2}(t_4 - t_1) \right) (y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}(t_1 - t_4) y_1, \frac{1}{2}(t_4 - t_1) y_2 \right).$$

Damit hat diese irreduzible Darstellung von $\mathfrak{pgl}_2(K)$ die Gewichte $t \mapsto k(t_1 - t_4)$ für $k = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, und es gibt keine entsprechende zweidimensionale Darstellung von \mathbf{PGL}_2 .

3.4.3 Darstellungen von \mathbf{PGL}_n

Für $n \geq 3$ lässt sich am Beispiel \mathbf{PGL}_n die Rolle der Abbildung i (vgl. Definition 3.7) auf den Charakteren illustrieren, da zu \mathbf{PGL}_n das Wurzelsystem A_{n-1} gehört, wofür $-w_0$ nicht die Identität ist.

Sei also $G = \mathbf{PGL}_n$. Die Diagonalmatrizen bilden einen maximalen Torus T , und die oberen Dreiecksmatrizen bilden eine Borelgruppe B , die T enthält. Der Normalisator von T besteht aus den Matrizen, bei denen in jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag ungleich null ist, und die Weylgruppe $W = N_G(T)/T$ hat genau $n!$ Elemente. Repräsentanten sind etwa die Matrizen W_π , wobei π eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ ist und $W_\pi = E_{1,\pi(1)} + \dots + E_{n,\pi(n)}$. Zum Beispiel ist W_{id} die Einheitsmatrix.

Die Wurzeln von G sind die Charaktere $\chi_{j,k}$ ($j \neq k \in \{1, \dots, n\}$) mit $\chi_{j,k}(t) := \frac{t_j}{t_k}$ für $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in T$. Als positive Wurzeln kann man $\Phi^+ = \{\chi_{j,k} \mid j < k\}$ und als fundamentale Wurzeln $\Delta = \{\chi_{j,j+1}\}$ wählen.

Das Element der Weylgruppe, das die positiven auf die negativen Wurzeln abbildet, ist $w_0 = W_{\pi_0}$ mit $\pi_0(j) = n - j + 1$ (d. h. W_{π_0} ist die Matrix mit Einsen auf der Diagonalen von rechts oben nach links unten), denn wegen

$$w_0(\chi_{j,k})(t) = \chi_{j,k}(W_{\pi_0} \cdot t \cdot W_{\pi_0}^{-1}) = \chi_{j,k}(\text{diag}(t_n, \dots, t_1)) = \frac{t_{n-j+1}}{t_{n-k+1}} = \chi_{n-j+1, n-k+1}(t)$$

gilt $w_0(\chi_{j,k}) = \chi_{n-j+1, n-k+1}$, und für $\chi_{j,k} \in \Phi^+$ gilt $\chi_{n-j+1, n-k+1} \in \Phi^-$.

Da offensichtlich $-\chi_{j,k} = \chi_{k,j}$ gilt, folgt für die in 3.7 definierte Abbildung i :

$$i(\chi_{j,k}) = -w_0(\chi_{j,k}) = \chi_{n-k+1, n-j+1},$$

und man sieht leicht, dass i für $n \geq 3$ nicht die Identität ist.

Beispiel 3.35. Für $n = 3$ vertauscht i die fundamentalen Wurzeln $\chi_{1,2}$ und $\chi_{2,3}$ und lässt die positive Wurzel $\chi_{1,3}$ fest.

Eine unter der Weylgruppe invariante Bilinearform auf $X(T)_{\mathbb{Q}} \cong \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \sum x_j = 0\}$ erhält man durch das Standardskalarprodukt auf \mathbb{Q}^n . Sei $e_j \in \mathbb{Q}^n$ der i -te Standardbasisvektor. Die fundamentale Wurzel $\chi_{j,j+1}$ entspricht $e_j - e_{j+1}$.

Per Definition ist ein Gewicht ψ der Gruppe \mathbf{PGL}_n genau dann fundamental, wenn $(\psi, \chi_{j,j+1}) \geq 0$ für alle $j \in 1, \dots, n-1$ gilt. Für das zugehörige $(\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{Q}^n$ ergibt das die Bedingung $\psi_1 \geq \dots \geq \psi_n$.

Betrachte nun zum fundamentalen Gewicht $\psi = (n-1, -1, \dots, -1)$ die vor Satz 3.8 definierte Operation von G durch Linkstranslation auf $K[G]_{\psi}$. Damit erhält man ein Beispiel dafür, dass $K[G]_{\psi}$ eine Darstellung zum Höchstgewicht $i(\psi)$ (und nicht etwa ψ) ist. Außerdem wird gezeigt, wie man in diesem Fall mit Hilfe der kontragradierten Darstellung (vgl. Satz 3.10) die Darstellung zum Höchstgewicht ψ erhält.

Mit $D = (\det x)^{-1}$ gilt $K[G]_{\psi} = \langle Dx_{\alpha_1,1} \dots x_{\alpha_n,1} \mid \alpha_j \in \{1, \dots, n\} \rangle_{K\text{-VR}}$, denn man sieht leicht, dass das der Eigenraum zum Gewicht ψ unter Rechtstranslation ist, und man rechnet dann nach, dass das auch der B -Eigenraum (vgl. Definition 3.17) ist.

Wegen $\lambda_b(Dx_{n,1}^n) = \det(b^{-1}x)^{-1}(b_{n,n}^{-1}x_{n,1})^n = \frac{\det b}{b_{n,n}^n} \cdot Dx_{n,1}^n$ für alle $b \in B$ ist $Dx_{n,1}^n$ ein B -Eigenvektor zum Gewicht $\phi = (1, \dots, 1, 1 - n)$ der Darstellung von G durch Linkstranslation auf $K[G]_\psi$, d. h. ϕ ist Höchstgewicht dieser Darstellung. Wie nach Satz 3.8 erwartet, gilt $\phi = i(\psi)$.

Sei nun $\widehat{\lambda}$ die zugehörige kontragradiente Darstellung, d. h. für $h^* \in (K[G]_\psi)^*$ und $f \in K[G]_\psi$ gilt

$$(\widehat{\lambda}_g(h^*))(f(x)) = (h^* \circ \lambda_{g^{-1}})(f(x)) = h^*(f(gx)).$$

Definiert man h^* durch $h^*(Dx_{1,1}^n) = 1$ und $h^*(f(x)) = 0$ für alle anderen oben angegebenen Erzeuger f von $K[G]_\psi$, dann lässt sich direkt nachrechnen, dass h^* Eigenvektor von $\widehat{\lambda}$ zum Höchstgewicht ψ ist.

3.4.4 Darstellungen von \mathbf{GL}_2

Zur Gruppe \mathbf{GL}_2 lassen sich die dominanten Gewichte χ leicht bestimmen. Satz 3.8 liefert dann die irreduziblen Darstellungen zu diesen Gewichten, wobei man keine komplizierten Berechnungen anstellen muss. Es reicht, einen „Kandidaten“ V für den Raum $K[G]_\chi$ zu „raten“ und nachzurechnen, dass V stabil unter Linkstranslation ist und nur einen eindimensionalen Borel-Eigenraum enthält. Dann folgt aus Satz 3.5, dass V tatsächlich die Höchstgewichtsdarstellung zu χ ist.

Sei also G die reduktive Gruppe \mathbf{GL}_2/K . Ein maximaler Torus ist T mit

$$T(K) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_4 \in K^* \right\},$$

und eine Borelgruppe, die T enthält, ist B mit

$$B(K) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \mid b_1, b_4 \in K^*, b_2 \in K \right\}.$$

Der Rang von T ist 2. Die Charaktergruppe $X(T)$ besteht aus allen $\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ der Form $t \mapsto t_1^{k_1} t_4^{k_2}$. Identifiziert man so ein χ mit $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, dann erhält man einen Isomorphismus $X(T) \cong \mathbb{Z}^2$. Die adjungierte Darstellung von G ist

$$\text{Ad} : G(K) \rightarrow \mathbf{GL}(\mathfrak{gl}_2(K)), \quad \text{Ad}(g)(x) = gxg^{-1} \text{ für } g \in G(K), x \in \mathfrak{M}_2(K),$$

und wegen $\text{Ad}(t)(x) = \begin{pmatrix} x_1 & t_1 t_4^{-1} x_2 \\ t_1^{-1} t_4 x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ sind $(1, -1)$ und $(-1, 1)$ Wurzeln von G , die das Wurzelsystem $\Phi = A_1$ bilden. Passend zur gewählten Borelgruppe ist $(1, -1)$ dabei die fundamentale Wurzel. Die Weylgruppe $W = Z_G(T)/T$ hat zwei Elemente, repräsentiert etwa von $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Das übliche Skalarprodukt auf \mathbb{Z}^2 , $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := a_1 b_1 + a_2 b_2$, ist unter der Weylgruppe invariant, denn es gilt

$$(w_2(a_1, a_2), w_2(b_1, b_2)) = ((a_2, -a_1), (b_2, -b_1)) = ((a_1, a_2), (b_1, b_2)).$$

Die Gewichte von G sind alle $\chi \in X(T)_\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$, die $2(\chi, \alpha)(\alpha, \alpha)^{-1} \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Phi$ erfüllen. Mit $\chi = (x_1, x_2)$, $\alpha = \pm(1, -1)$ heißt das: $\pm 2(x_1 - x_2)((1, -1), (1, -1))^{-1} \in \mathbb{Z}$, also $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$. Insbesondere sind alle $\chi \in X(T)$ Gewichte. Dominante Gewichte sind

alle $\chi \in X(T)_{\mathbb{Q}}$, die $2(\chi, \alpha)(\alpha, \alpha)^{-1} \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$ erfüllen. Wegen $\Delta = \{(1, -1)\}$ sind das alle Gewichte (a_1, a_2) mit $a_1 \geq a_2$.

Die irreduzible Darstellung zum dominanten Gewicht $\chi = (a_1, a_2) \in X(T)$ ist

$$K[G]_{\chi} = \{f \in K[G] \mid r_b^* f = \chi(b) \cdot f \quad \forall b \in B\}$$

mit Operation von G durch Linkstranslation. Für $f(x) = x_1^{k_1} x_3^{k_2} (\det(x))^{k_3}$ und $b \in B$ gilt

$$(r_b^* f)(x) = (b_1 x_1)^{k_1} (b_1 x_3)^{k_2} (\det(b) \det(x))^{k_3} = b_1^{k_1+k_2+k_3} b_4^{k_3} f(x),$$

sodass man für $k_3 = a_2$ und $k_1 + k_2 = a_1 - a_2$ Elemente von $K[G]_{\chi}$ erhält. Da diese einen unter Linkstranslation stabilen Unterraum erzeugen und nur der vom Element $f_0(x) = x_3^{a_1-a_2} (\det(x))^{a_2}$ erzeugte Unterraum unter Linkstranslation mit B stabil ist, ist das eine irreduzible Darstellung. Sie hat Dimension $a_1 - a_2 + 1$. Wegen

$$\lambda_t f_0(x) = (t_4^{-1} x_3)^{a_1-a_2} (\det(t)^{-1} \det(x))^{a_2} = t_1^{-a_2} t_4^{-a_1} f_0(x)$$

für $t \in T$ ist das Höchstgewicht dieser Darstellung $(-a_2, -a_1)$, und man rechnet leicht nach, dass $(-a_2 - 1, -a_1 + 1), \dots, (-a_1, -a_2)$ die restlichen Gewichte sind.

Es gilt $i(\chi) = -w_0(\chi)$, wobei w_0 die positive Wurzel $(1, -1)$ auf die negative $(-1, 1)$ abbildet und alle Gewichte, die orthogonal zu den Wurzeln sind, unverändert lässt. Orthogonal zu ihnen sind offenbar genau die Gewichte der Form (a_1, a_2) mit $a_1 = a_2$. Damit gilt $w_0((a_1, a_2)) = (a_2, a_1)$, also $i((a_1, a_2)) = (-a_2, -a_1)$.

3.4.5 Darstellungen von \mathbf{SL}_2

Analog zur Vorgehensweise für \mathbf{GL}_2 lassen sich auch die irreduziblen Darstellungen von \mathbf{SL}_2 bestimmen.

Sei $G = \mathbf{SL}_2/K$. Ein maximaler Torus ist T mit

$$T(K) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{pmatrix} \mid t_1 \cdot t_4 = 1, t_i \in K^* \right\},$$

dessen Rang 1 ist, und eine Borelgruppe ist B mit

$$B(K) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \mid b_1 \cdot b_4 = 1, b_2 \in K, b_1, b_4 \in K^* \right\}.$$

Die Charaktergruppe $X(T)$ besteht aus allen $\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ der Form $\chi(t) = t_1^{k_1} t_4^{k_2}$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ (auch als (k_1, k_2) geschrieben), wobei für $j \in \mathbb{Z}$ wegen $t_1 \cdot t_4 = 1$ die Gleichung $(k_1, k_2) = (k_1 + j, k_2 + j)$ gilt. Also folgt $X(T) \cong \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ durch $(k_1, k_2) \mapsto k_1 - k_2$.

Die Wurzeln berechnen sich wie im Fall von \mathbf{GL}_2 als $(1, -1)$, $(-1, 1)$, und wieder ist $(1, -1)$ die zu B passende positive Wurzel. Das Gewichtsgitter ist genau $X(T)$. Das fundamental-dominante Gewicht ist $(1, 0)$. Dominante Gewichte sind alle $(k_1, k_2) \in X(T)$ mit $k_1 \geq k_2$. Jedes von ihnen lässt sich auch als $(k, 0) = (k_1 - k_2, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}_0^+$ schreiben.

Ähnlich wie im Fall \mathbf{GL}_2 stellt man fest, dass jedes $f \in K[G]$ der Form $f(x) = x_1^{k_1} x_3^{k_2}$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0^+$ ein Borel-Eigenvektor zum Gewicht $(k_1 + k_2, 0)$ ist. Zum Gewicht $(k, 0)$ erhält man auf diese Weise $k + 1$ Eigenvektoren, und weil der von diesen Funktionen

aufgespannte Untervektorraum von $K[G]$ stabil unter Linkstranslation ist und es unter Linkstranslation nur den eindimensionalen von $f_0(x) = x_3^k$ erzeugten Borel-Eigenraum zum Gewicht $(0, -k) = (k, 0)$ gibt, ist damit die irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $(k, 0)$ mit Dimension $k + 1$ gefunden.

3.4.6 Darstellungen von \mathbf{SL}_2 in Charakteristik $p > 0$

In positiver Charakteristik lässt sich am Beispiel \mathbf{SL}_2 die Beschreibung aller irreduziblen Darstellungen mit Hilfe von Steinbergs Satz 3.24 verdeutlichen.

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Die in Satz 3.24 vorkommende Gewichtsmenge $X(T)_1$ wird von den k -fachen Vielfachen ($k \in \{0, \dots, p-1\}$) des fundamental-dominanten Gewichts $(1, 0)$ gebildet. Die irreduziblen Darstellungen zu diesen Gewichten haben dieselbe Form wie in Charakteristik 0, also insbesondere Dimension $k + 1$.

Jede natürliche Zahl k lässt sich in eindeutiger Weise p -adisch entwickeln, d. h. in der Form $k = \sum_{i=0}^m p^i k_i$ mit $k_i \in \{0, \dots, p-1\}$ schreiben. Analog lässt sich jedes dominante Gewicht von \mathbf{SL}_2 , da es wie oben beschrieben die Form $(k, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}^+$ hat, als $\sum_{i=0}^m p^i \chi_i$ mit $\chi_i \in X(T)_1$ schreiben.

Satz 3.36. Die irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $(k, 0) = \sum_{i=0}^m p^i \cdot (k_i, 0)$ mit $k_i \in \{0, \dots, p-1\}$ hat die Form $\phi_k = \bigotimes_{i=0}^m \phi_{k_i}^{[i]}$. Ihre Dimension ist $\prod_{i=0}^m (k_i + 1)$.

Beweis. Die erste Aussage ist Satz 3.24 für den Fall \mathbf{SL}_2 . Weil $\phi_{(k_i, 0)}$ Dimension $k_i + 1$ hat und sich Dimensionen von Vektorräumen in Tensorprodukten multiplizieren, gilt die zweite Behauptung. \square

3.4.7 Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 in Charakteristik $p > 0$

Sei K ein Körper von positiver Charakteristik p . Für \mathbf{PGL}_2 wird ein einfaches Beispiel angegeben, in dem eine echte Unterdarstellung von $K[G]_\chi$ aus Satz 3.8 die Höchstgewichtsdarstellung zum Gewicht χ ist. Außerdem zeigt sich in diesem Fall, dass nicht jede irreduzible Darstellung von Steinbergs Satz 3.24 erfasst wird, was damit zusammenhängt, dass \mathbf{PGL}_2 nicht einfach zusammenhängend ist.

Die irreduziblen Darstellungen von G stehen auch in diesem Fall in Bijektion zu den dominanten Gewichten χ von G . Die Darstellung von G in $\Gamma(G/B, \xi_{-\chi})$ ist in positiver Charakteristik nicht unbedingt irreduzibel, hat aber eine unter G stabile Unterdarstellung, die den Gewichtsraum zu $i(\chi)$ enthält und irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $i(\chi)$ ist.

Beispiel 3.37. Die Charakteristik von K sei $p > 2$, und sei $G = \mathbf{PGL}_2/K$. Dann ist $V = \left\langle D^p x_1^{2p}, D^p x_1^p x_3^p, D^p x_3^{2p} \right\rangle_{K\text{-VR}}$ stabil unter Linkstranslation, denn für $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ und $f = D^p(\beta_1 x_1^{2p} + \beta_2 x_1^p x_3^p + \beta_3 x_3^{2p}) \in V$ gilt mit $E = (\det \alpha)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha^{-1}} f &= D^p E^p (\beta_1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3)^{2p} + \beta_2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3)^p (\alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3)^p \\ &\quad + \beta_3 (\alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3)^{2p}) \\ &= D^p E^p (\beta_1 (\alpha_1^p x_1^p + \alpha_2^p x_3^p)^2 + \beta_2 (\alpha_1^p x_1^p + \alpha_2^p x_3^p) (\alpha_3^p x_1^p + \alpha_4^p x_3^p) \\ &\quad + \beta_3 (\alpha_3^p x_1^p + \alpha_4^p x_3^p)^2) \in V. \end{aligned}$$

Die irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix} \mapsto \left(\frac{t_1}{t_4}\right)^p$ ist also 3-dimensional, und nicht $(2p+1)$ -dimensional wie in Charakteristik 0.

Die Vielfachheit dieser Darstellung in der rechtsregulären Darstellung ist aber $2p+1$, wie im Fall der Charakteristik 0, sodass Satz 3.20 in positiver Charakteristik im Allgemeinen falsch ist.

Auf folgende Weise erhält man die irreduziblen Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 in positiver Charakteristik:

Lemma 3.38. *Die irreduzible Darstellung (ϕ'_k, V'_k) von \mathbf{PGL}_2 zum Höchstgewicht $k = (k, -k)$ ist isomorph zur irreduziblen Darstellung (ϕ_{2k}, V_{2k}) von \mathbf{SL}_2 zum Höchstgewicht $(2k, 0) = (k, -k)$.*

Beweis. Sei χ der zu $(k, -k)$ gehörige Charakter von \mathbf{SL}_2 . In

$$K[\mathbf{SL}_2]_\chi = \{f \in K[x_1, \dots, x_4] / (\det(x)) \mid r_b^* f = \left(\frac{b_1}{b_4}\right)^k f \quad \forall b \in B\}$$

ist $V_{(k, -k)}$ der vom Höchstgewichtsvektor $f_0(x) = x_3^{2k}$ erzeugte Unterraum, und $V'_{(k, -k)}$ ist der in

$$K[\mathbf{PGL}_2]_{\chi'} = \{f \in K[x_1, \dots, x_4, D] \mid f(\lambda x) = f(x), r_b^* f = \left(\frac{b_1}{b_4}\right)^k f \quad \forall \lambda \in K, b \in B\}$$

vom Höchstgewichtsvektor $f_0(x) = D^k x_3^{2k}$ erzeugte Unterraum, wobei χ' der zum Gewicht $(k, -k)$ gehörige Charakter von \mathbf{PGL}_2 ist, mit $D = (\det x)^{-1}$

$K[\mathbf{SL}_2]_\chi$ besteht aus homogenen Polynomen in x_1, x_3 vom Grad $2k$, und $K[\mathbf{PGL}_2]_{\chi'}$ besteht aus Quotienten, deren Zähler homogene Polynome in x_1, x_3 vom Grad $2k$ sind und deren Nenner $(\det(x))^k$ ist.

Also liegt f genau dann in $K[\mathbf{SL}_2]_\chi$, wenn $D^k \cdot f$ in $K[\mathbf{PGL}_2]_{\chi'}$ liegt, und auch die Operation von G durch Linkstranslation sowie deren Höchstgewichtsvektor entsprechen einander. Daher sind die vom jeweiligen Höchstgewichtsvektor erzeugten Unterräume isomorph. \square

Bemerkung 3.39. Steinbergs Satz 3.24 beschreibt die irreduziblen Darstellungen von \mathbf{PGL}_2 nicht vollständig:

Sei $p > 2$. Betrachte die irreduzible Darstellung von \mathbf{PGL}_2 zum Höchstgewicht $\frac{p^2+1}{2}$. Als „ p -adische Entwicklung“ erhält man $\frac{p^2+1}{2} = p \cdot \frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2}$.

Nach Satz 3.36 und Lemma 3.38 hat einerseits $\phi'_{\frac{p+1}{2}}$ Dimension 4 und $\phi'_{\frac{p-1}{2}}$ Dimension p , sodass $\phi'_{\frac{p+1}{2}} \otimes \phi'_{\frac{p-1}{2}} [1]$ Dimension $4p$ hat. Andererseits hat die irreduzible Darstellung von $\mathbf{SL}_2(K)$ zum Höchstgewicht p^2+1 nach Satz 3.36 Dimension 4, und wegen Lemma 3.38 ist $\phi'_{\frac{p^2+1}{2}}$ also vierdimensional.

Damit lässt sich $\phi'_{\frac{p^2+1}{2}}$ nicht als $\phi'_{\frac{p+1}{2}} \otimes \phi'_{\frac{p-1}{2}} [1]$ schreiben.

Da aber das Gewicht $\frac{p+1}{2}$ nicht in $X(T)_1$ liegt, ergibt sich kein Widerspruch zu Satz 3.24. Die Höchstgewichtsdarstellung zu $\frac{p^2+1}{2}$ wird von diesem Satz nicht beschrieben.

Man stellt sogar fest, dass sich $\phi'_{\frac{p^2+1}{2}}$ nicht als nicht-triviales Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen schreiben lässt. Damit lässt sich also auch keine einfache Verallgemeinerung von Satz 3.24 finden, die alle irreduziblen Darstellungen beschreibt.

3.4.8 \mathbf{PGL}_2 und \mathbf{PSL}_2

Mit $\mathbf{GL}_2(K)$ sei die Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen bezeichnet. Im Gegensatz dazu bezeichnet \mathbf{GL}_2/K wie bisher die entsprechende lineare algebraische Gruppe und $\mathbf{GL}_2(K)$ ihre K -rationalen Punkte. Analog unterscheidet man $\mathbf{SL}_2(K)$, \mathbf{SL}_2/K und $\mathbf{SL}_2(K)$.

Betrachte die Gruppen $\mathbf{PGL}_2(K) = \mathbf{GL}_2(K)/K^*$ und $\mathbf{PSL}_2(K) = \mathbf{SL}_2(K)/(\pm 1)$. In diesem Abschnitt soll das Verhältnis zwischen ihnen und den linearen algebraischen Gruppen \mathbf{PGL}_2/K und \mathbf{PSL}_2/K geklärt werden.

Offensichtlich hat man eine Injektion $i : \mathbf{PSL}_2(K) \rightarrow \mathbf{PGL}_2(K)$. Falls der Grundkörper K algebraisch abgeschlossen ist, hat jedes Element von $\mathbf{PGL}_2(K)$ einen Repräsentanten mit Determinante 1. Dieser definiert ein Element von $\mathbf{PSL}_2(K)$, sodass i ein Isomorphismus ist.

Falls K nicht algebraisch abgeschlossen ist, ist i nicht unbedingt ein Isomorphismus, denn $[X] \in \mathbf{PGL}_2(K)$ liegt genau dann im Bild von i , wenn $\det X$ ein Quadrat in K^* ist. Der Kokern von i ist offenbar $K^*/(K^*)^2$.

Beispiel 3.40. Sei $K = \mathbb{R}$, und sei $M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ mit negativer Determinante. Dann hat jeder Repräsentant von $[M] \in \mathbf{PGL}_2(\mathbb{R})$ ebenfalls negative Determinante, und $[M]$ liegt also nicht im Bild von i .

Lemma 3.41. *Die linearen algebraischen Gruppen \mathbf{PSL}_2/K und \mathbf{PGL}_2/K sind isomorph.*

Beweis. Die lineare algebraische Gruppe \mathbf{PSL}_2 ist als \mathbf{SL}_2/μ_2 definiert, wobei $\mu_2 = \{\pm 1\}$ die Gruppe der zweiten Einheitswurzeln ist. Den Koordinatenring von \mathbf{PSL}_2 bilden dann die unter Linkstranslation mit μ_2 invarianten Elemente des Koordinatenringes von \mathbf{SL}_2 :

$$\begin{aligned} K[\mathbf{PSL}_2] &= \{f \in K[\mathbf{SL}_2] \mid \lambda_{-1}f = f\} \\ &= \langle x_i x_j \mid i, j \in \{1, \dots, 4\} \rangle_{K\text{-Alg}} \subset K[x_1, \dots, x_4]/(\det x - 1), \end{aligned}$$

und mit $\mathbf{PGL}_2 = \mathbf{GL}_2/\mathbb{G}_m$ gilt

$$\begin{aligned} K[\mathbf{PGL}_2] &= \{f \in K[\mathbf{GL}_2] \mid \lambda_c f = f \quad \forall c \in K^*\} \\ &= \langle \frac{x_i x_j}{\det x} \mid i, j \in \{1, \dots, 4\} \rangle_{K\text{-Alg}} \subset K[x_1, \dots, x_4, (\det x)^{-1}]. \end{aligned}$$

Die Einbettung $\mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{GL}_2$ bildet $\mu_2 \subset \mathbf{SL}_2$ in $K^* \subset \mathbf{GL}_2$ ab, induziert also eine Einbettung $\mathbf{PSL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$. Diese induziert für die Koordinatenringe einen Homomorphismus $K[\mathbf{PGL}_2] \rightarrow K[\mathbf{PSL}_2]$ mit $\frac{x_i x_j}{\det x} \mapsto x_i x_j$, der sogar ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $x_i x_j \mapsto \frac{x_i x_j}{\det x}$ ist.

Damit sind die Koordinatenringe von \mathbf{PGL}_2 und \mathbf{PSL}_2 isomorph, sodass auch die linearen algebraischen Gruppen \mathbf{PGL}_2 und \mathbf{PSL}_2 isomorph sein müssen. \square

Beispiel 3.42. Die Menge $\mathbf{SL}_2(K)$ der K -rationalen Punkte des Schemas \mathbf{SL}_2/K ist als die Menge aller Morphismen $f : \text{Spec } K \rightarrow \mathbf{SL}_2$ definiert. Mit $\mathbf{SL}_2 = \text{Spec } A$, $A = K[x_1, \dots, x_4]/(\det x - 1)$ wird so ein f durch einen Algebrenhomomorphismus

$\phi : A \rightarrow K$ gegeben, der wiederum durch $\alpha_i = \phi(x_i)$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ bestimmt ist. Beliebige $\alpha_i \in K$ ergeben genau dann so eine Abbildung, wenn sie $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 1$ erfüllen. Mittels $f \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ erhält man eine Abbildung $\mathbf{SL}_2(K) \rightarrow \mathbb{SL}_2(K)$, die offensichtlich bijektiv ist.

Analog gilt $\mathbf{GL}_2(K) \cong \mathbb{GL}_2(K)$.

Sei nun $K^* \neq (K^*)^2$. Da einerseits wegen der Isomorphie von \mathbf{PGL}_2 und \mathbf{PSL}_2 auch die Mengen $\mathbf{PGL}_2(K)$ und $\mathbf{PSL}_2(K)$ der K -rationalen Punkte isomorph sind, aber andererseits $\mathbb{PGL}_2(K)$ und $\mathbb{PSL}_2(K)$ wie oben beschrieben nicht isomorph sind, kann allgemein nicht sowohl $\mathbf{PSL}_2(K) \cong \mathbb{PSL}_2(K)$ als auch $\mathbf{PGL}_2(K) \cong \mathbb{PGL}_2(K)$ gelten.

Tatsächlich gilt $\mathbf{PSL}_2(K) \not\cong \mathbb{PSL}_2(K)$: Sei $B = K[\mathbf{PSL}_2]$, also $\mathbf{PSL}_2/K = \text{Spec } B$. Analog zur Situation bei \mathbf{SL}_2 ist jeder K -rationale Punkt durch einen Morphismus $f : \text{Spec } K \rightarrow \mathbf{PSL}_2/K$ definiert, der wiederum durch $\phi : B \rightarrow K$ gegeben ist. B wird von $x_i x_j$ ($i, j \in \{1, \dots, 4\}$) erzeugt, und für jedes $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(K)$ definiert $x_i x_j \mapsto \alpha_i \alpha_j$ einen Homomorphismus ϕ_α . Man sieht leicht, dass $\phi_\alpha = \phi_{\alpha'}$ genau dann gilt, wenn $\alpha = -\alpha'$ gilt, sodass der Homomorphismus $\mathbb{SL}_2(K) \rightarrow \mathbf{PSL}_2(K)$, $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ eine injektive Abbildung $\mathbb{PSL}_2(K) \rightarrow \mathbf{PSL}_2(K)$ induziert.

Diese ist aber im Allgemeinen nicht surjektiv, denn auch jedes $\beta \in \mathbb{GL}_2(K)$ definiert über $\phi_\beta : x_i x_j \mapsto \frac{\beta_i \beta_j}{\det \beta}$ einen K -rationalen Punkt von \mathbf{PSL}_2 , wie man leicht überprüft. Da $\phi_\beta = \phi_{\beta'}$ genau dann gilt, wenn $\beta' = c \cdot \beta$ für ein $c \in K^*$ gilt, induziert das eine injektive Abbildung $\mathbb{PGL}_2(K) \rightarrow \mathbf{PSL}_2(K)$, die sich bei näherer Betrachtung als Bijektion herausstellt, vgl. Lemma 3.44.

Beispiel 3.43. Sei $K = \mathbb{R}$. Dann definiert $x_1^2 \mapsto -1$, $x_4^2 \mapsto -1$, $x_1 x_4 \mapsto 1$ und sonst $x_i x_j \mapsto 0$ einen \mathbb{R} -rationalen Punkt von \mathbf{PSL}_2 , der nicht als $x_i x_j = \alpha_i \alpha_j$ für ein $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ gegeben ist, denn für kein $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ kann $x_1^2 = \alpha_1^2 = -1$ gelten. Dieser \mathbb{R} -rationale Punkt ergibt sich wie oben beschrieben aus $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{R})$.

Lemma 3.44. *Es gilt $\mathbf{PSL}_2(K) \cong \mathbf{GL}_2(K)/K^* \cong \mathbb{PGL}_2(K)$.*

Beweis. Wie oben beschrieben, konstruiert man aus jedem $\beta \in \mathbf{GL}_2(K)/K^*$ ein $\phi_\beta : K[\mathbf{PSL}_2] \rightarrow K$, und für jedes $c \in K^*$ gilt $\phi_\beta = \phi_{c\beta}$.

Umgekehrt definiert man folgendermaßen zu einem gegebenen Homomorphismus $\psi : K[\mathbf{PSL}_2] \rightarrow K$ ein $\alpha_\psi \in \mathbf{GL}_2(K)$: wähle j so, dass $\psi(x_j^2) \neq 0$. (Wäre $\psi(x_j^2) = 0$ für alle j , dann würde wegen $\psi(x_i x_j)^2 = \psi(x_i^2) \psi(x_j^2)$ auch $\psi(x_i x_j) = 0$ für alle i, j gelten, was nicht sein kann.) Definiere $\alpha_i = \psi(x_j x_i) \in K$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$. Dann ist $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ ein Element von $\mathbf{GL}_2(K)/K^*$, denn

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\right) &= \psi(x_j x_1) \psi(x_j x_4) - \psi(x_j x_2) \psi(x_j x_3) = \psi(x_j^2) (\psi(x_1 x_4) - \psi(x_2 x_3)) \\ &= \psi(x_j^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $\psi \mapsto \alpha_\psi$ und $\beta \mapsto \phi_\beta$ sind invers zueinander, denn es gilt

$$\alpha_{\phi_\beta} = \begin{bmatrix} \phi_\beta(x_j x_1) & \phi_\beta(x_j x_2) \\ \phi_\beta(x_j x_3) & \phi_\beta(x_j x_4) \end{bmatrix} = \frac{\beta_j}{\det \beta} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} = \beta$$

und

$$\phi_{\alpha_\psi}(x_k x_l) = \frac{\alpha_k \alpha_l}{\det \alpha} = \frac{\psi(x_j x_k) \psi(x_j x_l)}{\psi(x_j^2)} = \psi(x_k x_l)$$

für alle $k, l \in \{1, \dots, 4\}$.

□

Korollar 3.45. *Es gilt $\mathbf{PGL}_2(K) \cong \mathbf{GL}_2(K)/K^* \cong \mathbf{PGL}_2(K)$.*

Beweis. Wegen $\mathbf{PSL}_2 \cong \mathbf{PGL}_2$ folgt das aus Lemma 3.44.

□

4 Prinzipial-homogene Räume

Sei G eine über einem Körper K definierte lineare algebraische Gruppe, die wie in Kapitel 1.3 beschrieben von rechts auf einem über K definierten Schema X operiert.

Das Schema X wird dann auch als G -Raum bezeichnet. Ein Morphismus von G -Räumen ist ein Morphismus von Varietäten, der die G -Operation respektiert.

Die Operation von G auf X heißt *einfach transitiv*, falls die Abbildung

$$X \times G \xrightarrow{\Delta \times \text{id}_G} X \times X \times G \xrightarrow{\text{id}_X \times \phi} X \times X$$

ein Isomorphismus ist, wobei $\Delta : X \rightarrow X \times X$ die Diagonalabbildung ist. Dann heißt X *prinzipial-homogener Raum zu G* . Auf Punkten bedeutet das, dass die Abbildung $(x, g) \mapsto (x, xg)$ bijektiv ist.

Lemma 4.1. *Sei X ein prinzipial-homogener Raum zur linearen algebraischen Gruppe G , beide über K definiert. X und G sind genau dann als G -Räume isomorph, wenn X über K definierte Punkte hat.*

Beweis. Falls X über K definierte Punkte hat, wählt man einen beliebigen Punkt $p \in X(K)$ und erhält durch

$$\phi \circ (p \times \text{id}_G) : G \cong \text{Spec } K \times G \xrightarrow{p \times \text{id}_G} X \times G \xrightarrow{\phi} X$$

einen Isomorphismus von Schemata zwischen G und X . Betrachtet man G als G -Raum durch Operation von rechts auf sich selbst, dann sind X und G auf diese Weise sogar als G -Räume isomorph.

Sind umgekehrt X und G über K isomorph, dann hat X über K definierte Punkte, denn jede über einem Körper K definierte lineare algebraische Gruppe hat K -rationale Punkte (z. B. das neutrale Element $e \in G(K)$). \square

Lemma 4.2. *Sei X wie oben ein prinzipial-homogener Raum zu G über K . Dann gibt es eine endliche galoissche Körpererweiterung L/K so, dass X_L und G_L isomorph sind.*

Beweis. Wie jede Varietät hat X rationale Punkte über dem separablen Abschluss K^{sep} von K . Sei $x \in X(K^{\text{sep}})$ ein solcher Punkt. Adjungiert man zu K die endlich vielen Koordinaten von x , die ja alle algebraisch über K sind, erhält man eine endliche Körpererweiterung $K(x)/K$ so, dass x über $K(x)$ rational ist. Sei L eine Erweiterung, die $K(x)$ enthält und galoissch über K ist. Nach dem vorangegangenen Lemma sind X_L und G_L isomorph. \square

Lemma 4.3. *Sei G wie oben eine lineare algebraische Gruppe über dem Körper K , und seien die Automorphismen von G als G -Raum mit $\text{Aut}(G)$ bezeichnet. Dann ist $\phi : G(K) \rightarrow \text{Aut}(G(K))$, $p \mapsto l_p := \mu \circ (p \times \text{id}_G)$ ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $f \mapsto f(e) := f \circ e$.*

Beweis. Zu einem beliebigen $p \in G(K)$ definiert

$$l_p : G \xrightarrow{\sim} \text{Spec } K \times G \xrightarrow{p \times \text{id}} G \times G \xrightarrow{\mu} G,$$

die Linkstranslation mit p , einen Morphismus von G -Räumen. Offenbar ist l_p invers zu $l_{p^{-1}}$, sodass l_p ein Automorphismus ist.

Umgekehrt hat jedes $f \in \text{Aut}(G)(K)$ die Form $f = l_p$ mit $p = f(e)$, denn es gilt

$$f = f \circ \mu \circ (e \times \text{id}_G) = \mu \circ (f \times \text{id}_G) \circ (e \times \text{id}_G) = \mu \circ (p \times \text{id}_G) = l_p$$

(mit $f \circ \mu = \mu \circ (f \times \text{id}_G)$, weil f ein G -Raum-Morphismus ist, und $\mu \circ (e \times \text{id}_G) = \text{id}_G$ als Eigenschaft des neutralen Elements e von G). \square

4.1 Galois-Abstieg für G -Räume

Die wichtigsten Ergebnisse über den Galois-Abstieg findet man in [Jah03], Abschnitt 2. Hier sollen entsprechende Sätze für G -Räume gefolgert werden.

Satz 4.4. *Sei L/K eine endliche galoissche Körpererweiterung mit Galoisgruppe Γ . Die folgende Abbildung ist eine Äquivalenz von Kategorien:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{prinzipial-homogene Räume} \\ \text{über } K \text{ zur linearen} \\ \text{algebraischen Gruppe } G \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{prinzipial-homogene Räume} \\ \text{über } L \text{ zur linearen} \\ \text{algebraischen Gruppe } G_L \\ \text{zusammen mit einer} \\ \text{kompatiblen Operation von } \Gamma \end{array} \right\}$$

$$X \mapsto X_L$$

Morphismen in beiden Kategorien sind die Morphismen von Schemata, die mit den jeweiligen Strukturen verträglich sind.

Beweis. Die Galoisgruppe Γ operiert auf $\text{Spec } L$, induziert von $\sigma^{-1} : L \rightarrow L$ für $\sigma \in \Gamma$. Mit $\text{id} \times \sigma$ erhält man eine Operation von Γ auf $X_L = X \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L$, die mit der Operation $\text{id} \times \sigma$ auf G_L kompatibel ist. Dass G_L einfach transitiv von rechts auf X_L operiert und dass sich Morphismen zwischen prinzipial-homogenen Räumen über K geeignet über L fortsetzen lassen, ist offensichtlich. Damit ist der obige Funktor wohldefiniert.

Dass der Funktor wesentlich surjektiv und volltreu ist, wird in den folgenden beiden Lemmata gezeigt. \square

Lemma 4.5. *Sei Y ein prinzipial-homogener Raum über L zu G_L mit einer kompatiblen Operation von Γ . Dann gibt es solch einen prinzipial-homogenen Raum X über K , dass X_L isomorph zu Y ist und dieser Isomorphismus die Operationen von G und Γ respektiert.*

Der in Satz 4.4 angegebene Funktor ist also wesentlich surjektiv.

Beweis. Für quasi-projektive Schemata ist der Galois-Abstieg zum Beispiel aus [Jah03], Satz 2.2 bekannt. Weil Y zu G über einer galoisschen Erweiterung isomorph ist (Lemma 4.2) und G affin ist, ist auch Y affin (mit [Jah03], Lemma 2.12xi). Damit gibt es ein affines Schema X über K so, dass $X_L \cong Y$. Zu zeigen ist noch, dass X ein prinzipal-homogener Raum zu G ist.

Sei $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, $G = \text{Spec } C$ für K -Algebren A und C und eine L -Algebra B . Nach der Konstruktion von X in [Jah03], Prop. 2.3 gilt $A = B^\Gamma$. Dass Y prinzipal-homogener Raum zu G_L ist, bedeutet auf der Ebene der Koordinatenringe, dass es eine Abbildung $\phi^* : B \rightarrow B \otimes_L C_L$ gibt, für die

$$\psi : B \otimes_L B \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi^*} B \otimes_L B \otimes_L C_L \xrightarrow{\Delta^* \otimes \text{id}} B \otimes_L C_L$$

ein Isomorphismus ist.

Da ϕ mit der Operation von Γ kompatibel ist, gilt $\sigma(\phi(a)) = \phi(\sigma a) = \phi(a)$ für $a \in A = B^\Gamma$. Also induziert ϕ^* durch Einschränkung auf A einen Homomorphismus

$$\phi^{*\Gamma} : A \rightarrow (B \otimes_L C_L)^\Gamma = A \otimes_K C.$$

Damit dieser eine Operation von G von rechts auf X definiert, müssen gewisse Diagramme kommutieren. Diese sind aber nur eine Einschränkung der entsprechenden kommutativen Diagramme für die Operation von G_L auf Y .

Da das Bild von Δ^* eingeschränkt auf A in $A \otimes_K A$ liegt, lässt sich der Isomorphismus ψ zur injektiven Abbildung

$$\psi^\Gamma : A \otimes_K A \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi^{*\Gamma}} A \otimes_K A \otimes_K C \xrightarrow{\Delta^{*\Gamma} \otimes \text{id}} A \otimes_K C$$

einschränken. Jedes $x \in A \otimes_K C$ hat unter ψ ein Urbild y in $B \otimes_L B$. Weil ϕ^* und Δ^* mit Γ kommutieren, gilt $\psi(\sigma y) = \sigma \psi(y) = \psi(y)$, und weil ψ ein Isomorphismus ist, folgt $y \in (B \otimes_L B)^\Gamma = A \otimes_K A$. Damit ist ψ^Γ ein Isomorphismus, und X ist ein prinzipal-homogener Raum zu G über K . \square

Lemma 4.6. *Seien X und X' zwei prinzipal-homogene Räume zu G über K . Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Morphismen von G -Räumen $X \rightarrow X'$ über K und den Morphismen von G_L -Räumen $X_L \rightarrow X'_L$ über L , die mit der Operation von Γ kompatibel sind.*

Damit ist der in Satz 4.4 angegebene Funktor volltreu.

Beweis. Sei $f : X \rightarrow X'$ ein solcher Morphismus. Dann ist $f \otimes \text{id} : X_L \rightarrow X'_L$ offensichtlich ein mit der Γ -Operation kompatibler Morphismus von G_L -Räumen.

Da $X = \text{Spec } A$ und $X' = \text{Spec } A'$ wie im Beweis von Lemma 4.5 affin sind, findet man zu $f_L : X_L \rightarrow X'_L$ einen solchen Morphismus von Schemata $f : X \rightarrow X'$, dass $f_L = f \times \text{id}$ gilt und f durch $f^* : A' \rightarrow A$ gegeben ist (vgl. [Jah03], Prop. 2.7 und 2.8).

Damit f_L ein Morphismus von prinzipal-homogenen Räumen zu G_L über L ist, muss auf der Ebene der Algebren das folgende Diagramm kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} A'_L & \xrightarrow{\phi'_L} & A'_L \otimes_L C_L \\ f_L^* \downarrow & & \downarrow f_L^* \otimes \text{id} \\ A_L & \xrightarrow{\phi_L} & A_L \otimes_L C_L \end{array}$$

Aus dem vorangegangenen Lemma folgt, dass sich ϕ_L^* und $\phi_L'^*$ auf die entsprechenden Γ -Invarianten einschränken lassen, und wegen [Jah03], Prop. 2.7 lässt sich f_L^* einschränken. Das eingeschränkte Diagramm kommutiert ebenfalls, sodass f nicht nur ein Morphismus von Schemata, sondern auch ein Morphismus von prinzipial-homogenen Räumen zu G über K ist. \square

Satz 4.7. *Die Isomorphieklassen von prinzipial-homogenen Räumen über K zur linearen algebraischen Gruppe G , die einen L -rationalen Punkt haben, werden durch $H^1(L/K, G)$ beschrieben.*

Beweis. Aus Satz 4.4 folgt mit Hilfe der allgemeinen Theorie des Galois-Abstiegs, dass die Isomorphieklassen von prinzipial-homogenen Räumen über K , die über L zu G_L isomorph werden, durch $H^1(L/K, \text{Aut}(G))$ beschrieben werden, wobei $\text{Aut}(G)$ die Automorphismen von G als G -Raum bezeichnet.

Nach Satz 4.3 sind diese Automorphismen über L durch $G(L)$ gegeben, und nach Lemma 4.1 ist ein prinzipial-homogener Raum X genau dann über L isomorph zu G_L , wenn X einen L -rationalen Punkt hat. \square

4.2 Kohomologische Beschreibung

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen Isomorphieklassen von prinzipial-homogenen Räumen und der Gruppenkohomologie, der in Satz 4.7 mit Hilfe allgemeiner Zusammenhänge gewonnen wurde, noch einmal direkt hergeleitet werden.

Wie oben sei L/K eine galoissche Körpererweiterung, $\Gamma = \text{Gal}(L/K)$, G eine lineare algebraische Gruppe über K , X ein prinzipial-homogener Raum zu G über K .

Sei $f : G_L \rightarrow X_L$ ein über L definierter Isomorphismus. Dann ist $f^{-1} \circ \sigma f : G_L \rightarrow G_L$ ein im Allgemeinen nicht-trivialer Automorphismus von G_L als G_L -Raum. Dieser ist nach Lemma 4.3 durch das Bild $a_\sigma = f^{-1} \circ \sigma f \circ e$ des neutralen Elements $e \in G(L)$ eindeutig bestimmt.

Lemma 4.8. *Sei $f : G_L \rightarrow X_L$ ein über L definierter Isomorphismus. Dann definiert $a : \Gamma \rightarrow G(L)$, $\sigma \mapsto a_\sigma$ einen Kozykel, und $[a] \in H^1(L/K, G)$ hängt nicht von der Wahl von f ab.*

Beweis. Mit $e : \text{Spec } L \rightarrow G_L$ gilt $a_\sigma = f^{-1} \circ \sigma f \circ e$. Wegen

$$a_{\sigma\gamma} = f^{-1} \sigma\gamma f e = f^{-1} \sigma f \sigma(f^{-1} \gamma f) e = a_\sigma \sigma a_\gamma$$

ist a ein Kozykel.

Falls $f' : G_L \rightarrow X_L$ ein anderer Isomorphismus ist, der den Kozykel a' definiert, gilt $f' = f \circ g$ für einen Automorphismus g von G_L , und man erhält

$$a'_\sigma = (fg)^{-1} \sigma(fg) e = g^{-1} f^{-1} \sigma f \sigma g e = g^{-1} a_\sigma \sigma g.$$

Damit sind a und a' kohomolog. \square

Lemma 4.9. *Sind X und X' prinzipal-homogene Räume über K zu G , die über K isomorph sind, dann gilt $[a] = [a'] \in H^1(L/K, G)$ für die zugehörigen $[a]$ bzw. $[a']$ wie oben.*

Beweis. Falls $f : G \rightarrow X$ ein Isomorphismus über L und $g : X \rightarrow X'$ ein Isomorphismus über K ist, dann kann man $[a']$ mit Hilfe von $f' := g \circ f : G \rightarrow X'$ definieren. Dann gilt

$$a'_\sigma = (gf)^{-1} \sigma(gf)e = f^{-1}g^{-1} \sigma_g \sigma f e = f^{-1} \sigma f e = a_\sigma,$$

denn es gilt $\sigma g = g$, weil g über K definiert ist. □

Sei umgekehrt ein Kozykel $[a] \in H^1(L/K, G)$ durch $a : \Gamma \rightarrow G(L), \sigma \mapsto a_\sigma$ gegeben. Dann erhält man auf folgende Weise einen prinzipal-homogenen Raum zu G über K .

Die Galoisgruppe Γ operiert von links auf G_L , gegeben durch die Operation von Γ auf den Koeffizienten der Polynome in $L[G]$. Mit Hilfe des Kozykels a definiert man eine weitere Operation von Γ von links auf G_L .

Lemma 4.10. *Betrachte für $\sigma \in \Gamma$ die Abbildung*

$$G_L \rightarrow G_L, \quad \sigma' := l_{a_\sigma} \circ \sigma.$$

1. *Diese Abbildung definiert eine Gruppenoperation von Γ auf G_L , genannt getwistete Operation.*
2. *Das folgende Diagramm kommutiert für alle $\sigma \in \Gamma$:*

$$\begin{array}{ccc} G_L \times G_L & \xrightarrow{\mu} & G_L \\ \sigma' \times \sigma \downarrow & & \sigma' \downarrow \\ G_L \times G_L & \xrightarrow{\mu} & G_L \end{array}$$

Beweis. Zu 1: Wegen

$$\sigma\sigma' = l_{a_{\sigma\gamma}} \sigma\gamma = l_{a_\sigma} \sigma l_{a_\gamma} \sigma(\gamma) = l_{a_\sigma} \sigma(l_{a_\gamma} \gamma) = \sigma'(\sigma')$$

und $e' = l_{a_e} e = \text{id}$ für das neutrale Element $e \in G(L)$ ist das tatsächlich eine Operation auf G_L .

Zu 2: Da die Operation von $\sigma \in \Gamma$ auf G_L ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $\sigma \circ \mu = \mu \circ (\sigma \times \sigma)$. Weil die Linkstranslation auf G_L ein G -Raum-Morphismus ist, gilt $l_{a_\sigma} \circ \mu = \mu \circ (l_{a_\sigma} \times \text{id})$. Zusammen folgt:

$$\sigma' \circ \mu = l_{a_\sigma} \circ \sigma \circ \mu = \mu \circ (l_{a_\sigma} \times \text{id}) \circ (\sigma \times \sigma) = \mu \circ (\sigma' \times \sigma). \quad \square$$

Bemerkung 4.11. Die Operation von Γ auf G_L induziert keine Operation auf den L -rationalen Punkten, weil $\sigma' : G_L \rightarrow G_L$ kein Morphismus ist, was man etwa daran sieht, dass die zugehörige Operation von σ auf $L[G]$ nicht L -linear, also kein L -Algebren-Homomorphismus ist.

Mit diesen Informationen kann man einen direkteren Beweis von Satz 4.7 geben, der außerdem Auskunft darüber gibt, wie man aus einem Kozykel einen prinzipial-homogenen Raum konstruiert.

Die in Lemma 4.10 beschriebene getwistete Operation von Γ auf G_L induziert eine getwistete Operation auf dem Koordinatenring $L[G]$ von $G(L)$.

Lemma 4.12. *Wie schon in Satz 4.7 beschrieben wurde, gilt: Die Isomorphieklassen von prinzipial-homogenen Räumen über K zur linearen algebraischen Gruppe G , die einen L -rationalen Punkt haben, werden durch $H^1(L/K, G)$ beschrieben.*

Der prinzipial-homogene Raum X zu G zum Kozykel a mit $[a] \in H^1(L/K, G)$ lässt sich dabei als affines Schema realisieren, dessen Koordinatenring $K[X]$ von den Elementen aus $L[G]$ gebildet wird, die unter der zu a gehörenden getwisteten Operation von Γ fixiert sind.

Beweis. Sei X ein prinzipial-homogener Raum über K zu G , der einen L -rationalen Punkt hat. Nach Lemma 4.8 definiert X ein Element von $H^1(L/K, G)$, das nach Lemma 4.9 nicht von der K -Isomorphieklasse von X abhängt.

Umgekehrt definiert jedes Element von $H^1(L/K, G)$ nach Lemma 4.10(1) eine Operation von Γ auf dem trivialen prinzipial-homogenen Raum G_L über L . Nach 4.10(2) ist diese Operation kompatibel im Sinne von Satz 4.4, sodass man mit Hilfe dieses Satzes einen prinzipial-homogenen Raum über K erhält. Wie im Beweis von Lemma 4.5 angegeben, realisiert man X als affines Schema zum Koordinatenring der unter der getwisteten Operation fixierten Elemente von $L[G]$.

Dass diese beiden Prozesse invers zueinander sind, rechnet man leicht nach. □

4.3 Operationen auf dem Koordinatenring

Sei G/K wie oben eine lineare algebraische Gruppe, und seien L/K eine endliche galoissche Körpererweiterung, $\Gamma = \text{Gal}(L/K)$,

$$[a] \in H^1(L/K, G) \text{ gegeben durch } a : \Gamma \rightarrow G(L), \sigma \mapsto a_\sigma$$

und X der zugehörige prinzipial-homogene Raum.

Sei G_L beliebig in \mathbf{GL}_n/L eingebettet, und sei $L[G]$ damit als Quotient eines Polynomringes über L dargestellt.

Lemma 4.13. *In folgender Weise übertragen sich die Operationen von $G(L)$ und Γ auf G_L auf den Koordinatenring:*

1. *Der Rechtstranslation r_α mit $\alpha \in G(K)$ auf G entspricht eine Operation von $G(K)$ auf $K[G]$, bei der $f(x) \in K[G]$ auf $(r_\alpha^* f)(x) = f(x \cdot \alpha)$ abgebildet wird. Dabei handelt es sich um eine Operation von links. Entsprechend induziert die Linkstranslation als $(l_\alpha^* f)(x) = f(\alpha \cdot x)$ eine Operation von rechts.*
2. *Der Standardoperation von Γ auf G_L von links entspricht eine Operation auf $L[G]$, bei der $\sigma \in \Gamma$ koeffizientenweise durch σ^{-1} operiert, geschrieben als ${}^\sigma f$ für $f \in L[G]$. Damit operiert Γ von rechts auf $L[G]$. Fixiert unter dieser Operation ist $L[G]^\Gamma = K[G]$.*

3. Die mit $[a] \in H^1(L/K, G)$ getwistete Operation von Γ auf G_L induziert eine getwistete Operation von rechts auf $L[G]$ durch $(\sigma'f)(x) = (\sigma f)((\sigma^{-1}a_\sigma) \cdot x)$.
4. Die getwistete Operation und die Rechtstranslation sind durch $r_\alpha^*(\sigma'f) = \sigma'(r_{\sigma_\alpha}^* f)$ kompatibel. Insbesondere kommutieren Rechtstranslation und Twist für $\alpha \in G(K)$.
5. Die getwistete Operation und die Skalarmultiplikation sind durch $\lambda \cdot \sigma'f = \sigma'((\sigma\lambda) \cdot f)$ für $\lambda \in L$ kompatibel. ■

Beweis. Zu 1: Wegen $r_\alpha = \mu \circ (\text{id} \times \alpha)$ gilt $r_\alpha^* = (\text{id} \otimes \alpha^*) \circ \mu^*$. Da $(\mu^* f)(x, y) = f(x \cdot y)$ und α^* Einsetzen von α ist, folgt die Behauptung.

Zu 2: Die Operation von σ auf G_L erhält man aus der Operation von σ auf $\text{Spec } L$ als $\text{id} \times \sigma$ auf $G \times \text{Spec } L$. Die Operation von σ auf $\text{Spec } L$ wird dabei von der Operation durch σ^{-1} auf L induziert.

Daraus folgt, dass man die Operation von σ auf $L[G] = K[G] \otimes L$ als $\text{id} \otimes \sigma^{-1}$ erhält, woraus sich direkt die Behauptung ergibt.

Dass genau $K[G]$ unter Γ fixiert ist, sieht man einerseits an der Beschreibung der Operation auf den Koeffizienten, andererseits folgt es auch aus $G_L^\Gamma = G$.

Zu 3: Wegen $\sigma' = l_{a_\sigma} \circ \sigma = \sigma \circ l_{\sigma^{-1}a_\sigma}$ gilt $(\sigma'f)(x) = (\sigma f)((\sigma^{-1}a_\sigma) \cdot x)$.

Zu 4: Es gilt $\sigma \circ r_\alpha = r_{\sigma_\alpha} \circ \sigma$. Weil Rechts- und Linkstranslation kommutieren, folgt daraus $\sigma' \circ r_\alpha = r_{\sigma_\alpha} \circ \sigma'$. Überträgt man das auf $L[G]$, ergibt sich die Behauptung.

Zu 5: Es gilt $\lambda \cdot \sigma f = \sigma(\sigma\lambda \cdot f)$, da Γ durch σ^{-1} auf den Koeffizienten von $f \in L[G]$ operiert. Daraus folgt die Behauptung, weil Skalarmultiplikation und Linkstranslation kommutieren. □

Lemma 4.14. *Seien X' bzw. X'' prinzipal-homogene Räume zu den Kozykeln a bzw. b .*

1. Falls a und b durch $y \in G(L)$ (mit $b_\sigma = y^{-1}a_\sigma y$ für alle $\sigma \in \Gamma$) kohomolog sind, dann ist $K[X''] \rightarrow K[X']$, $f \mapsto l_y^* f$ ein Isomorphismus.
2. Falls $K[X']$ und $K[X'']$ isomorph sind, dann sind a und b kohomolog.

Beweis. Zu 1: Die durch a definierte getwistete Operation wird als σ' geschrieben, die durch b definierte als σ'' .

Sei $f \in K[X']$, d. h. für $f \in L[G]$ gilt $\sigma'f = f$. Dann liegt $l_y^* f$ in $K[X'']$, denn

$$\sigma''(l_y^* f) = \sigma(l_{b_\sigma}^* l_y^* f) = \sigma(l_{\sigma y}^* l_{a_\sigma}^* f) = l_y^*(\sigma'f) = l_y^* f.$$

Genauso rechnet man nach, dass $f \mapsto l_{y^{-1}}^* f$ Elemente von $K[X'']$ nach $K[X']$ abbildet, und l_y^* und $l_{y^{-1}}^*$ sind zueinander inverse Abbildungen.

Zu 2: Die Koordinatenringe $K[X']$ und $K[X'']$ sind genau isomorph, wenn die Schemata X' und X'' isomorph sind, und nach Satz 4.7 ist das genau dann der Fall, wenn die zugehörigen Kozykel a und b kohomolog sind. □

Lemma 4.15. *Sei G eine lineare algebraische Gruppe mit einem Torus T , der über K zerfällt. Falls $f \in L[G]$ Eigenvektor zum Gewicht χ bzgl. der Rechtstranslation ist, dann ist $\sigma'f$ für $\sigma \in \Gamma$ ebenfalls Eigenvektor zum Gewicht χ .*

Beweis. Dass f Eigenvektor zum Gewicht χ ist, bedeutet $r_t^* f = \chi(t) \cdot f$ für alle $t \in T(L)$.

Da der Torus T über K zerfällt, operiert Γ trivial auf den Charakteren, d. h. es gilt $\chi(\sigma t) = \sigma(\chi(t))$. Also gilt mit 4.13(4) und (5)

$$r_t^*(\sigma' f) = \sigma'(r_{\sigma t}^* f) = \sigma'(\chi(\sigma t) \cdot f) = \sigma'(\sigma(\chi(t)) \cdot f) = \chi(t) \cdot \sigma' f$$

für alle $t \in T(L)$, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Lemma 4.16. *Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung. Falls $f \in L[G]$ Eigenvektor zum Gewicht χ bzgl. der Rechtstranslation ist, dann ist*

$$\hat{f} := \sum_{\sigma \in \Gamma} \sigma' f \in K[X]$$

null oder Eigenvektor zum Gewicht χ .

Beweis. Wegen

$$\gamma' \hat{f} = \sum_{\sigma \in \Gamma} (\gamma\sigma)' f = \sum_{\sigma \in \Gamma} \sigma' f = \hat{f}$$

ist \hat{f} stabil unter der getwisteten Operation von Γ , und damit gilt tatsächlich $\hat{f} \in K[X]$.

Aus dem vorhergehenden Lemma folgt, dass \hat{f} als Summe von Eigenvektoren zum Gewicht χ entweder null oder ebenfalls Eigenvektor zum Gewicht χ ist. \square

Bemerkung 4.17. Sei L/K eine unendliche galoissche Körpererweiterung und X ein prinzipial-homogener Raum zu G über L/K . Dann werden $K[X]$ und $K[G]$ über L isomorph. Ein zugehöriger Isomorphismus ist aber schon über der endlichen Erweiterung von K definiert, die von den Bildern der endlich vielen Erzeugenden von $K[G]$ aufgespannt wird.

Damit kann jede L/K -Form von G als Form für eine endliche Körpererweiterung aufgefasst werden, sodass Lemma 4.16 immer verwendet werden kann, um Eigenvektoren für Formen von G zu bestimmen.

Satz 4.18. *Sei G eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 mit einem Torus, der über K zerfällt. Die Koordinatenringe aller prinzipial-homogenen Räume zu G haben dieselbe Zerlegung in irreduzible Darstellungen, und sie stimmt mit der Zerlegung von $L[G]$ überein (wenn man irreduzible Darstellungen von G/K mit den entsprechenden von G/L identifiziert).*

Beweis. Sei X so ein prinzipial-homogener Raum. Nach Satz 3.15 stimmt die Zerlegung von $K[X]$ mit der von $L[X] \cong L[G]$ bis auf Erweiterung von K auf L überein. Daher haben alle homogenen Räume $K[X]$ (und insbesondere auch $K[G]$) dieselbe Zerlegung in irreduzible Darstellungen. \square

4.4 Beispiele

4.4.1 Prinzipal-homogene Räume zu PGL_2

Seien nun L/K eine endliche galoissche Erweiterung von Körpern der Charakteristik 0, $G = \mathbf{PGL}_2/K$ und weiterhin $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$. Sei X ein prinzipal-homogener Raum über L/K zu einem Kozykel a , $[a] \in H^1(L/K, G)$. Für den Koordinatenring $K[G]$ gilt mit $D := (\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix})^{-1}$:

$$\begin{aligned} K[G] &= \{f \in K[\mathbf{GL}_2] \mid f(\lambda x) = f(x) \quad \forall \lambda \in K^*\} \\ &= \{f \in K[x_1, x_2, x_3, x_4, D] \mid f(\lambda x) = f(x) \quad \forall \lambda \in K^*\} \\ &= \langle Dx_1^2, Dx_2^2, Dx_3^2, Dx_4^2, Dx_1x_2, Dx_1x_3, Dx_1x_4 + Dx_2x_3, Dx_2x_4, Dx_3x_4 \rangle_{K\text{-Alg}}. \end{aligned}$$

Analog erhält man $L[G]$. Die in Lemma 3.33 eingeführte Bezeichnung $K[G]_{\mathrm{deg} 2k}$ wird auch in diesem Abschnitt verwendet, und analog

$$L[G]_{\mathrm{deg} 2k} := \{D^k f \mid f \in L[x_1, \dots, x_4] \text{ homogen vom Grad } 2k\}.$$

Mit $K[X]_{\mathrm{deg} 2k}$ werden dann die unter einer getwisteten Operation festen Elemente von $L[G]_{\mathrm{deg} 2k}$ bezeichnet. Offenbar gilt $K[X]_{\mathrm{deg} 2k} \otimes_K L \cong L[G]_{\mathrm{deg} 2k}$.

Beispiel 4.19. Im Fall $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ erhält man Folgendes:

$H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die nicht-triviale Klasse wird von $\sigma \mapsto a_\sigma := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ für die komplexe Konjugation $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ repräsentiert (vgl. Bemerkung 1.8). Sei X der zugehörige prinzipal-homogene Raum.

Auf $\mathbb{C}[G]$ operiert Γ getwistet durch $(\sigma'f)(x) = (\sigma f)(\sigma^{-1}a_\sigma \cdot x) = (\sigma f)\left(\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ -x_1 & -x_2 \end{bmatrix}\right)$ nach Lemma 4.13(3). Insbesondere gilt mit $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sigma'(\alpha Dx_1^2) &= (\sigma \alpha) Dx_3^2, & \sigma'(\alpha Dx_2^2) &= (\sigma \alpha) Dx_4^2, \\ \sigma'(\alpha Dx_3^2) &= (\sigma \alpha) Dx_1^2, & \sigma'(\alpha Dx_4^2) &= (\sigma \alpha) Dx_2^2, \\ \sigma'(\alpha Dx_1x_3) &= -(\sigma \alpha) Dx_1x_3, & \sigma'(\alpha Dx_2x_4) &= -(\sigma \alpha) Dx_2x_4, \\ \sigma'(\alpha Dx_1x_4) &= -(\sigma \alpha) Dx_2x_3, & \sigma'(\alpha Dx_2x_3) &= -(\sigma \alpha) Dx_1x_4, \\ \sigma'(\alpha Dx_1x_2) &= (\sigma \alpha) Dx_3x_4, & \sigma'(\alpha Dx_3x_4) &= (\sigma \alpha) Dx_1x_2. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass sich zwar einerseits $\sigma'f$ durch koeffizientenweise Operation von σ^{-1} ergibt, aber andererseits in diesem Fall $\sigma^{-1} = \sigma$ gilt.

Stabil unter der getwisteten Operation sind also die in den Eigenräumen zu den Gewichten χ_1 , χ_0 und χ_{-1} liegenden Vektorräume $W_1 = \langle Dx_1^2, Dx_1x_3, Dx_3^2 \rangle_{\mathbb{C}\text{-VR}}$, $W_2 = \langle 2Dx_1x_2, D(x_1x_4 + x_2x_3), 2Dx_3x_4 \rangle_{\mathbb{C}\text{-VR}}$ und $W_3 = \langle Dx_2^2, Dx_2x_4, Dx_4^2 \rangle_{\mathbb{C}\text{-VR}}$.

Unter der getwisteten Operation fixierte Vektoren sind $D(x_1^2 + x_3^2)$, $iD(x_1^2 - x_3^2)$, iDx_1x_3 , $D(x_2^2 + x_4^2)$, $iD(x_2^2 - x_4^2)$, iDx_2x_4 , $2D(x_1x_2 + x_3x_4)$, $2iD(x_1x_2 - x_3x_4)$ und $iD(x_1x_4 + x_2x_3)$. Sie sind also Elemente von $\mathbb{R}[X]$. Da das Vektorraumergzeugnis dieser Elemente nach Tensorieren mit \mathbb{C} den Raum $\mathbb{C}[G]_{\mathrm{deg} 2}$ aufspannt und weil das Erzeugnis der Elemente von $\mathbb{C}[G]_{\mathrm{deg} 2}$ als Algebra $\mathbb{C}[G]$ erzeugt, müssen diese Elemente $\mathbb{R}[X]$ erzeugen.

Man stellt fest, dass

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle D(x_1^2 + x_3^2), 2D(x_1x_2 + x_3x_4), D(x_2^2 + x_4^2) \rangle_{\mathbb{R}\text{-VR}}, \\ V_2 &= \langle iD(x_1^2 - x_3^2), 2iD(x_1x_2 - x_3x_4), iD(x_2^2 - x_4^2) \rangle_{\mathbb{R}\text{-VR}}, \\ V_3 &= \langle iDx_1x_3, iD(x_1x_4 + x_2x_3), iDx_2x_4 \rangle_{\mathbb{R}\text{-VR}} \end{aligned}$$

stabile Untervektorräume von $\mathbb{R}[X]$ unter Rechtstranslation sind.

Für jedes V_j gilt: die drei angegebenen Basisvektoren sind Eigenvektoren zu den Gewichten χ_1 , χ_0 und χ_{-1} , und der erste Basisvektor von V_j ist Linearkombination der oben angegebenen Basisvektoren von W_1 mit denselben Koeffizienten wie beim zweiten Basisvektor von V_j als Linearkombination der Basisvektoren von W_2 . Auch der dritte Basisvektor ist eine entsprechende Linearkombination der Basis von W_3 .

Jedes V_i ist isomorph zur in Satz 3.32 beschriebenen irreduziblen Darstellung ϕ_1 . Zusammen mit $V_0 = \langle D(x_1x_4 - x_2x_3) \rangle_{\mathbb{R}\text{-VR}}$, dem eindimensionalen stabilen Unterraum von $\mathbb{R}[X]_{\text{deg } 2}$, hat man eine Zerlegung

$$\mathbb{R}[X]_{\text{deg } 2} = \bigoplus_{j=0}^3 V_j = \phi_0 \oplus \phi_1^3.$$

Sei nun wieder L/K eine beliebige Körpererweiterung. Beispiel 4.19 folgend, wird beschrieben, wie sich Elemente von $L[G]_{\text{deg } 2}$ finden lassen, die stabil unter einer gewisteten Operation von Γ sind, Eigenvektoren bzgl. der Rechtstranslation sind, eine Vektorraum-basis von $L[G]_{\text{deg } 2}$ bilden, als Algebra $L[G]$ erzeugen und sich zu unter Rechtstranslation stabilen Unterräumen gruppieren lassen. Damit wird dann erklärt sein, wie man $K[X]$ in irreduzible Darstellungen zerlegen kann.

Es gilt $L[G]_{\text{deg } 0} = L$ mit trivialer Operation von $G(L)$, und 1 ist Erzeuger des Eigenraums zum Gewicht $\chi(t) = 0$. Außerdem gilt

$$L[G]_{\text{deg } 2} = \langle Dx_1^2, Dx_2^2, Dx_3^2, Dx_4^2, Dx_1x_2, Dx_1x_3, Dx_2x_4, Dx_3x_4, D(x_1x_4 + x_2x_3), 1 \rangle_{L\text{-VR}}.$$

Für $t = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix} \in (T/\mathbb{G}_m)(K)$ erhält man: $(r_t^* f)(x) = f\left(\begin{bmatrix} t_1x_1 & t_4x_2 \\ t_1x_3 & t_4x_4 \end{bmatrix}\right)$, also z. B.

$$r_t^*(Dx_1^2) = \frac{(t_1x_1)^2}{\det(xt)} = \frac{t_1}{t_4} Dx_1^2 = \chi_1(t) \cdot Dx_1^2,$$

wobei $\chi_k(t) = \left(\frac{t_1}{t_4}\right)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ sei. Genauso rechnet man leicht nach, dass Dx_1^2 , Dx_3^2 und Dx_1x_3 den Eigenraum V_1 zum Gewicht χ_1 aufspannen, Dx_2^2 , Dx_4^2 und Dx_2x_4 den Eigenraum V_{-1} zum Gewicht χ_{-1} und $2Dx_1x_2$, $2Dx_3x_4$ und $D(x_1x_4 + x_2x_3)$ den Eigenraum V_0 zum Gewicht χ_0 (es wird sich später zeigen, warum $2Dx_1x_2$ und nicht etwa Dx_1x_2 als Erzeuger gewählt wurde).

Lemma 4.20. *Seien*

$$\begin{aligned} f_1 &= y_1 Dx_1^2 + y_2 Dx_1x_3 + y_3 Dx_3^2, \\ f_2 &= y_1 Dx_2^2 + y_2 Dx_2x_4 + y_3 Dx_4^2, \\ f_3 &= y_1(2Dx_1x_2) + y_2 D(x_1x_4 + x_2x_3) + y_3(2Dx_3x_4) \end{aligned}$$

mit $y_i \in L$. Sei $\widehat{f}_i = \sum_{\sigma \in \Gamma} \sigma' f_i$.

Dann gilt $\widehat{f}_i \in L[X]$, und es gibt $z_1, z_2, z_3 \in L$ mit

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1 &= z_1 Dx_1^2 + z_2 Dx_1x_3 + z_3 Dx_3^2, \\ \widehat{f}_2 &= z_1 Dx_2^2 + z_2 Dx_2x_4 + z_3 Dx_4^2, \\ \widehat{f}_3 &= z_1(2Dx_1x_2) + z_2D(x_1x_4 + x_2x_3) + z_3(2Dx_3x_4).\end{aligned}$$

Insbesondere sind die Unterräume $\langle Dx_1^2, Dx_1x_3, Dx_3^2 \rangle_{L-\text{VR}}$, $\langle Dx_2^2, Dx_2x_4, Dx_4^2 \rangle_{L-\text{VR}}$ und $\langle 2Dx_1x_2, 2D(x_1x_4 + x_2x_3), 2Dx_3x_4 \rangle_{L-\text{VR}}$ unter der getwisteten Operation von G stabil.

Beweis. Offensichtlich ist \widehat{f}_i stabil unter der getwisteten Operation, d. h. $\widehat{f}_i \in K[X]$. Sei $\sigma \in \Gamma$, $a_\sigma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ und $E = (\det a_\sigma)^{-1}$. Dass $\sigma' f_i$ wieder Linearkombination der jeweiligen Funktionen ist, liegt daran, dass diese einen Unterraum aufspannen, der stabil unter der getwisteten Operation ist.

Es gilt

$$\begin{aligned}\sigma' f_1 &= \sigma^{-1} y_1 D \sigma^{-1} E (\sigma^{-1} a_1 x_1 + \sigma^{-1} a_2 x_3)^2 \\ &\quad + \sigma^{-1} y_2 D \sigma^{-1} E (\sigma^{-1} a_1 x_1 + \sigma^{-1} a_2 x_3) (\sigma^{-1} a_3 x_1 + \sigma^{-1} a_4 x_3) \\ &\quad + \sigma^{-1} y_3 D \sigma^{-1} E (\sigma^{-1} a_3 x_1 + \sigma^{-1} a_4 x_3)^2 \\ &= \sigma^{-1} (E(y_1 a_1^2 + y_2 a_1 a_3 + y_3 a_3^2)) Dx_1^2 \\ &\quad + \sigma^{-1} (E(2y_1 a_1 a_2 + y_2(a_1 a_4 + a_2 a_3) + 2y_3 a_3 a_4)) Dx_1 x_3 \\ &\quad + \sigma^{-1} (E(y_1 a_2^2 + y_2 a_2 a_4 + y_3 a_4^2)) Dx_3^2.\end{aligned}$$

Genauso erhält man $\sigma' f_2$ mit denselben Koeffizienten, und entsprechend gilt bei $\sigma' f_3$

$$\begin{aligned}\sigma' f_3 &= 2 \sigma^{-1} y_1 D \sigma^{-1} E (\sigma^{-1} a_1 x_1 + \sigma^{-1} a_2 x_3) (\sigma^{-1} a_1 x_2 + \sigma^{-1} a_2 x_4) \\ &\quad + \sigma^{-1} y_2 D \sigma^{-1} E ((\sigma^{-1} a_1 x_1 + \sigma^{-1} a_2 x_3) (\sigma^{-1} a_3 x_2 + \sigma^{-1} a_4 x_4) \\ &\quad \quad + (\sigma^{-1} a_1 x_2 + \sigma^{-1} a_2 x_4) (\sigma^{-1} a_3 x_1 + \sigma^{-1} a_4 x_3)) \\ &\quad + 2 \sigma^{-1} y_3 D \sigma^{-1} E (\sigma^{-1} a_3 x_1 + \sigma^{-1} a_4 x_3) (\sigma^{-1} a_3 x_2 + \sigma^{-1} a_4 x_4) \\ &= \sigma^{-1} (E(y_1 a_1^2 + y_2 a_1 a_3 + y_3 a_3^2)) (2Dx_1x_2) \\ &\quad + \sigma^{-1} (E(2y_1 a_1 a_2 + y_2(a_1 a_4 + a_2 a_3) + 2y_3 a_3 a_4)) D(x_1x_4 + x_2x_3) \\ &\quad + \sigma^{-1} (E(y_1 a_2^2 + y_2 a_2 a_4 + y_3 a_4^2)) (2Dx_3x_4).\end{aligned}$$

Summiert man diese Ausdrücke für die verschiedenen $\sigma \in \Gamma$ auf, erhält man wiederum Linearkombinationen von Dx_1^2 , Dx_1x_3 , Dx_3^2 bzw. Dx_2^2 , Dx_2x_4 , Dx_4^2 bzw. $2Dx_1x_2$, $D(x_1x_4 + x_2x_3)$, $2Dx_3x_4$ mit denselben Koeffizienten. \square

Lemma 4.21. *Seien $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3 \in K[X]$ wie im vorherigen Lemma. Dann sind $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3$ entweder alle null oder erzeugen einen Unterraum V , der bzgl. Rechtstranslation eine irreduzible Darstellung von G/K der Dimension 3 ist.*

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma sind \widehat{f}_1 , \widehat{f}_2 und \widehat{f}_3 entweder alle null oder linear unabhängig.

Sei $\widehat{f} := \lambda_1 \widehat{f}_1 + \lambda_2 \widehat{f}_2 + \lambda_3 \widehat{f}_3$ mit $\lambda_i \in K$, und sei $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \in G(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 r_v^* \widehat{f} &= \lambda_1 (z_1 DE(x_1 v_1 + x_2 v_3))^2 + z_2 DE(x_1 v_1 + x_2 v_3)(x_3 v_1 + x_4 v_3) \\
 &\quad + z_3 DE(x_3 v_1 + x_4 v_3)^2 \\
 &\quad + \lambda_2 (z_1 DE(x_1 v_2 + x_2 v_4))^2 + z_2 DE(x_1 v_2 + x_2 v_4)(x_3 v_2 + x_4 v_4) \\
 &\quad + z_3 DE(x_3 v_2 + x_4 v_4)^2 \\
 &\quad + \lambda_3 (2z_1 DE(x_1 v_1 + x_2 v_3)(x_1 v_2 + x_2 v_4) \\
 &\quad \quad + z_2 DE((x_1 v_1 + x_2 v_3)(x_3 v_2 + x_4 v_4) + (x_1 v_2 + x_2 v_4)(x_3 v_1 + x_4 v_3)) \\
 &\quad \quad + 2z_3 DE(x_3 v_1 + x_4 v_3)(x_3 v_2 + x_4 v_4)) \\
 &= E(\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + 2\lambda_3 v_1 v_2)(z_1 Dx_1^2 + z_2 Dx_1 x_3 + z_3 Dx_3^2) \\
 &\quad + E(\lambda_1 v_3^2 + \lambda_2 v_4^2 + 2\lambda_3 v_3 v_4)(z_1 Dx_2^2 + z_2 Dx_2 x_4 + z_3 Dx_4^2) \\
 &\quad + E(\lambda_1 v_1 v_3 + \lambda_2 v_2 v_4 + \lambda_3 (v_1 v_4 + v_2 v_3)) \\
 &\quad \quad \cdot (z_1 (2Dx_1 x_2) + z_2 D(x_1 x_4 + x_2 x_3) + z_3 (2Dx_3 x_4)) \\
 &\in K \widehat{f}_1 + K \widehat{f}_2 + K \widehat{f}_3.
 \end{aligned}$$

Damit ist V stabil unter Rechtstranslation.

Nach Lemma 4.16 sind \widehat{f}_1 , \widehat{f}_2 und \widehat{f}_3 genauso wie f_1 , f_2 und f_3 Eigenvektoren zu den Gewichten χ_1 , χ_{-1} und χ_0 . Damit folgt die Behauptung. \square

Nach Satz 4.18 hat $K[X]_{\deg 2}$ dieselbe Zerlegung wie $L[G]_{\deg 2}$, und mit Lemma 3.33 gilt also $K[X]_{\deg 2} \cong \phi_0 \oplus \phi_1^3$. Dabei ist $D(x_1 x_4 - x_2 x_3) = 1 \in K[X]_{\deg 2}$ isomorph zu ϕ_0 , und die Eigenvektoren für die drei Kopien von ϕ_1 erhält man so:

Wähle ein beliebiges $f_1 \in \langle Dx_1^2, Dx_1 x_3, Dx_3^2 \rangle_{L\text{-VR}}$. Berechne $\widehat{f}_1 = \sum_{\sigma \in \Gamma} \sigma' f_1 \in K[X]$. Falls $\widehat{f}_1 \neq 0$ ist, ist \widehat{f}_1 Eigenvektor zum Gewicht χ_1 , und nach Lemma 4.20 erhält man aus den Koeffizienten von \widehat{f}_1 die Eigenvektoren \widehat{f}_2 zu χ_{-1} und \widehat{f}_3 zu χ_0 . Nach Lemma 4.21 bilden \widehat{f}_1 , \widehat{f}_2 und \widehat{f}_3 einen unter Rechtstranslation stabilen Unterraum, der damit isomorph zu ϕ_1 ist.

Für die beiden anderen Kopien startet man so lange mit anderen f_1 , bis das neue \widehat{f}_1 linear unabhängig über K von den vorherigen \widehat{f}_1 ist. Die sich dazu ergebenden \widehat{f}_2 und \widehat{f}_3 sind dann automatisch linear unabhängig von den vorherigen \widehat{f}_2 bzw. \widehat{f}_3 .

4.4.2 Unterschiede in den Koordinatenringen im Fall \mathbf{PGL}_2

Sei L/K weiterhin eine galoissche Körpererweiterung. Wie in Lemma 4.12 angegeben und im vorhergehenden Abschnitt konkreter im Fall \mathbf{PGL}_2 beschrieben, erhält man den Koordinatenring eines prinzipial-homogenen Raums X zu einer linearen algebraischen Gruppe G als die Funktionen des Koordinatenringes $L[G]$, die unter der in Lemma 4.13(3) beschriebenen getwisteten Operation der Galoisgruppe Γ fixiert sind.

Damit ist $K[X]$ eine K -Unteralgebra von $L[G]$, für die $K[X] \otimes_K L = L[G]$ gilt. Offen bleibt die Frage, was der entscheidende Unterschied zwischen $K[X]$ und $K[G]$ ist, der

dafür sorgt, dass diese Algebren zwar beide über L zu $L[G]$ werden, dass sie aber über K nicht isomorph sind. In diesem Abschnitt sollen einige Überlegungen zu dieser Frage zusammengestellt werden.

Der Unterschied liegt nicht einfach darin, dass $K[X]$ nicht identisch zu $K[G]$ in der gegebenen Einbettung als Unter algebra von $L[G]$ ist, denn folgendes Beispiel eines Kozykels der trivialen Kohomologiekategorie in $H^1(L/K, G)$ zeigt, dass es auch K -Unteralgebren von $L[G]$ gibt, die isomorph zu, aber nicht identisch mit $K[G]$ sind.

Beispiel 4.22. Seien $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ und $G = \mathbf{PGL}_2/\mathbb{R}$. Sei $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{e, \sigma\}$, wobei σ die komplexe Konjugation ist. Dann definiert

$$a : \Gamma \rightarrow G(\mathbb{C}), \quad e \mapsto a_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma \mapsto a_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

einen Kozykel, denn $a_\sigma \sigma a_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_e$, und dieser Kozykel ist trivial, denn es gilt $a_\sigma = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}^{-1} \cdot \sigma \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$.

Nach der Vorgehensweise des vorhergehenden Abschnitts berechnet man

$$(\sigma'f)(x) = (\sigma f)((\sigma^{-1} a_\sigma) \cdot x) = (\sigma f)\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) = (\sigma f)\left(\begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ -x_3 & -x_4 \end{bmatrix}\right)$$

und erhält als fixierte Elemente von $L[G]_{\chi_1}$ mit $D = (\det x)^{-1}$

$$\begin{aligned} Dx_1^2 + \sigma'(Dx_1^2) &= -2Dx_1x_3 - Dx_3^2, \\ iDx_3^2 + \sigma'(iDx_3^2) &= 2iDx_3^2, \\ iDx_1^2 + \sigma'(iDx_1^2) &= 2iDx_1^3 + 2iDx_1x_3 + iDx_3^2, \end{aligned}$$

die offensichtlich den Eigenraum $(\mathbb{C}[G]_{\text{deg } 2})_{\chi_1}$ über \mathbb{C} bzw. $(\mathbb{R}[X]_{\text{deg } 2})_{\chi_1}$ über \mathbb{R} zum Gewicht χ_1 erzeugen. Insbesondere sieht man, dass $\mathbb{R}[X]$ nicht identisch mit $\mathbb{R}[G]$ ist.

Jeder Isomorphismus zwischen $K[X]$ und $K[G]$ induziert einen Automorphismus von $L[G]$, der mit der Operation von $G(L)$ durch Rechtstranslation kompatibel ist. Nach Lemma 4.3 ist so ein Automorphismus eine Linkstranslation l_y^* für ein $y \in G(L)$. Nach Lemma 4.14 bildet l_y^* genau dann $K[X]$ nach $K[G]$ ab, wenn der X definierende Kozykel a durch y trivial ist (d. h. $a_\sigma = y^{-1} \sigma y$ für alle $\sigma \in \Gamma$). Aus dieser Perspektive betrachtet, könnte man sagen, dass ein nicht-trivialer Kozykel einen Koordinatenring ergibt, der nicht zu $K[G]$ isomorph ist, weil man $K[X]$ nicht durch Linkstranslation nach $K[G]$ abbilden kann.

Ignoriert man aber die Tatsache, dass ein Isomorphismus zwischen $K[X]$ und $K[G]$ eine Linkstranslation sein muss, fällt es auch in einem konkreten Fall schwerer, direkt von gegebenen Algebren $K[X]$ und $K[G]$ zu beweisen, dass sie nicht isomorph sind. Im folgenden einfachsten Fall ist es aber dennoch möglich, wenn man die Zerlegung in irreduzible Darstellungen ausnutzt:

Seien wieder $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$, $G = \mathbf{PGL}_2/\mathbb{R}$ und X der in Beispiel 4.19 behandelte nicht-triviale prinzipal-homogene Raum zu G .

Ein Unterschied zwischen $\mathbb{R}[G]$ und $\mathbb{R}[X]$ zeigt sich dann in den Räumen $(\mathbb{R}[G]_{\text{deg } 4})_{\chi_2}$ und $(\mathbb{R}[X]_{\text{deg } 4})_{\chi_2}$, also in den Eigenräumen zum Gewicht χ_2 bzgl. der Rechtstranslation

im Unterraum der Funktionen, deren Zähler ein Polynom in x_1, \dots, x_4 vom Grad 4 und deren Nenner $(\det x)^2$ ist.

Wie in Beispiel 4.19 berechnet wurde, gilt $(\mathbb{R}[G]_{\deg 2})_{\chi_1} = \langle Dx_1^2, Dx_3^2, Dx_1x_3 \rangle_{\mathbb{R}-\text{VR}}$. Zwischen diesen Erzeugern besteht in $(\mathbb{R}[G]_{\deg 4})_{\chi_2}$ die Relation $Dx_1^2 \cdot Dx_3^2 = (Dx_1x_3)^2$.

Lemma 4.23. *In $(\mathbb{R}[X]_{\deg 4})_{\chi_2}$ gibt es keine linear unabhängigen Elemente y_1, y_2, y_3 , die die Relation $y_1 \cdot y_2 = y_3^2$ in $(\mathbb{R}[X]_{\deg 4})_{\chi_2}$ erfüllen.*

Beweis. Angenommen, es gibt doch y_1, y_2, y_3 , die die Relation $y_1 \cdot y_2 = y_3^2$ erfüllen.

Nach Beispiel 4.19 gilt $(\mathbb{R}[X]_{\deg 2})_{\chi_1} = \langle D(x_1^2 + x_3^2), iD(x_1^2 - x_3^2), iDx_1x_3 \rangle_{\mathbb{R}-\text{VR}}$, und die Produkte dieser Erzeuger spannen $(\mathbb{R}[X]_{\deg 4})_{\chi_2}$ auf.

Jedes y_j hat also die Form $D(a_jx_1^2 + \bar{a}_jx_3^2 + ib_jx_1x_3)$ mit komplexem a_j und reellem b_j . Ausmultiplizieren von $y_1 \cdot y_2 = y_3^2$ und Vergleich der Koeffizienten von $D^2x_1^kx_3^{4-k}$ ergibt diese drei Bedingungen an die a_i, b_i :

$$a_1a_2 = a_3^2, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 2a_3b_3, \quad a_1\bar{a}_2 + \bar{a}_1a_2 - b_1b_2 = 2a_3\bar{a}_3 - b_3^2.$$

Angenommen, $a_j = 0$ für ein j . Wegen der ersten Bedingung folgt $a_k = 0$ für ein weiteres k , und y_j und y_k sind dann linear abhängig. Seien also alle $a_j \neq 0$. Wegen Bedingung 1 gilt $|a_1| \cdot |a_2| = |a_3|^2$, und nach passender Normierung von y_1, y_2, y_3 kann man $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$ voraussetzen. Falls $a_1 = \pm a_3$, dann folgt aus Bedingung 1 sofort $a_1 = a_2 = \pm a_3$, und y_1, y_2, y_3 sind linear abhängig.

Sei also $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$ und $a_1 \neq \pm a_3$. Es gilt $\arg(\frac{a_1}{a_3}) = -\arg(\frac{a_2}{a_3})$ wegen Bedingung 1, d. h. die nicht reellen Zahlen $\frac{a_1}{a_3}$ und $\frac{a_2}{a_3}$ liegen konjugiert zueinander auf dem Einheitskreis. Aus Bedingung 2 folgt $\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{b_1}{b_3} + \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{b_2}{b_3} = 2$. Da die Faktoren $\frac{b_1}{b_3}$ und $\frac{b_2}{b_3}$ reell sind, folgt $b_1 = b_2$ und $|b_1| = |b_2| > |b_3|$.

Dann gilt $a_1\bar{a}_2 + \bar{a}_1a_2 - b_1b_2 < 2 - b_3^2 = 2a_3\bar{a}_3 - b_3^2$, sodass Bedingung 3 nicht erfüllt ist. \square

Angenommen, es gäbe einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{R}[G]$, der die G -Operation respektiert. Dann muss dieser Isomorphismus auch die Eigenräume zu den entsprechenden Gewichten aufeinander abbilden, und auch Funktionen mit gleichem Grad müssen aufeinander abgebildet werden. Dann sind aber die Bilder y_1, y_2, y_3 von Dx_1^2, Dx_3^2, Dx_1x_3 in $(\mathbb{R}[X]_{\deg 4})_{\chi_2}$ linear unabhängig und erfüllen die Relation $y_1 \cdot y_2 = y_3^2$, was im Widerspruch zu obigem Lemma steht.

Damit ist die Annahme falsch, d. h. $\mathbb{R}[X]$ kann nicht isomorph zu $\mathbb{R}[G]$ sein.

Man betrachte nun weiterhin \mathbf{PGL}_2 , aber wieder eine beliebige Körpererweiterung L/K . Aufgrund des Beispiels hofft man darauf, dass es genau dann linear unabhängige Elemente $y_1, y_2, y_3 \in (K[X]_{\deg 2})_{\chi_1}$ gibt, die die Relation $y_1 \cdot y_2 = y_3^2$ in $(K[X]_{\deg 4})_{\chi_2}$ erfüllen, wenn X über einen trivialen Kozykel definiert ist. Eine allgemeine Überprüfung dieser Vermutung scheint aber schwer durchführbar zu sein.

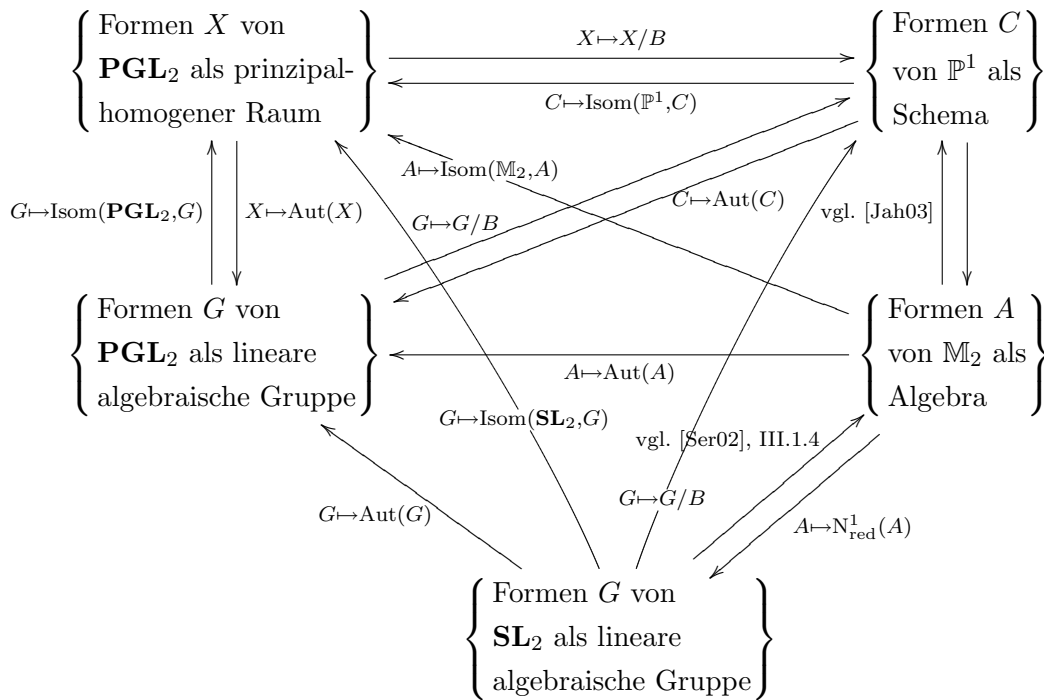
5 Formen

Sei L eine galoissche Erweiterung eines Körpers K . In diesem Abschnitt sei \mathfrak{X} die Menge der folgenden fünf Objekte, auf denen jeweils \mathbf{PGL}_2 in der angegebenen Weise operiert:

- \mathbf{PGL}_2/K als lineare algebraische Gruppe, \mathbf{PGL}_2 operiert durch Konjugation,
- \mathbf{PGL}_2/K als prinzipal-homogener Raum zu sich selbst, \mathbf{PGL}_2 operiert von links,
- \mathbf{SL}_2/K als lineare algebraische Gruppe, \mathbf{PGL}_2 operiert durch Konjugation,
- \mathbb{P}_K^1 als Schema, \mathbf{PGL}_2 operiert von links, sowie
- \mathbb{M}_2/K als Algebra, \mathbf{PGL}_2 operiert durch Konjugation.

Für ein beliebiges Objekt X/K wird ein Objekt X' , das über K definiert ist und über L zu X isomorph wird, als L/K -Form von X bezeichnet.

Das folgende Diagramm fasst zusammen, welche Übergänge zwischen Formen der Objekte aus \mathfrak{X} in diesem Abschnitt beschrieben werden sollen, und danach wird erklärt, warum überhaupt zu erwarten ist, dass es solche Übergänge gibt:



Wie in Abschnitt 5.1 gezeigt wird, beschreibt \mathbf{PGL}_2/K die Automorphismen jedes Objekts aus \mathfrak{X} , und da für jedes der fünf oben angegebenen Objekte der Galois-Abstieg funktioniert, beschreibt $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ die K -Isomorphieklassen der L/K -Formen dieses Objektes.

Zu einer gegebenen K -Isomorphieklasse von L/K -Formen eines Objekts aus \mathfrak{X} kann man also über die zugehörige Kohomologieklass in $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ je eine zugehörige K -Isomorphieklasse von L/K -Formen der anderen Objekte aus \mathfrak{X} konstruieren.

In vielen Fällen lässt sich der Übergang von den L/K -Formen des einen Objekts zu den L/K -Formen eines anderen Objekts direkt beschreiben, ohne den Umweg über die Isomorphieklassen und $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ zu machen.

5.1 \mathbf{PGL}_2 als Automorphismengruppe und Galoisabstieg

Lemma 5.1. *Für jedes Objekt $X \in \mathfrak{X}$ gilt kanonisch $\text{Aut}(X) = \mathbf{PGL}_2$.*

Beweis. Für $X = \mathbf{PGL}_2$ als prinzipal-homogenem Raum zu sich selbst wurde das in Lemma 4.3 bewiesen.

Für \mathbb{M}_2 als Algebra ist das der Satz von Skolem-Noether (vgl. [Jah03], Lemma 3.4).

Die Automorphismen von \mathbb{P}^1 werden für algebraisch abgeschlossene Körper in [Har77], Beispiel II.7.1.1 bestimmt. Der Beweis funktioniert allerdings genauso gut für beliebige Körper (vgl. [Jah03], Lemma 4.3).

Falls das Dynkin-Diagramm einer linearen algebraischen Gruppe G keine nicht-trivialen Automorphismen zulässt, hat G nur innere Automorphismen. Da das für das Dynkin-Diagramm A_1 von \mathbf{SL}_2 und \mathbf{PGL}_2 der Fall ist, gilt $\text{Aut}(\mathbf{SL}_2) = \text{Aut}(\mathbf{PGL}_2) = \mathbf{PGL}_2$ (vgl. [Ser02], III.1.4). \square

Lemma 5.2. *Für die Kategorien, in denen die Objekte aus \mathfrak{X} liegen, funktioniert der Galois-Abstieg.*

Beweis. Für prinzipal-homogene Räume über linearen algebraischen Gruppen wurde der Galois-Abstieg in Satz 4.4 beschrieben.

Galois-Abstieg für Algebren findet man etwa in [Jah03], Satz 2.2a und [Ser79], X.2. Für quasi-projektive Schemata siehe [Jah03], Satz 2.2b. Für lineare algebraische Gruppen siehe [Spr98], 11.3. \square

Satz 5.3. *Für jedes $X \in \mathfrak{X}$ gilt: die K -Isomorphieklassen der L/K -Formen von X stehen in Bijektion zu $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$.*

Beweis. Die allgemeine Theorie über den Galois-Abstieg besagt, dass diese Isomorphieklassen durch $H^1(L/K, \text{Aut}(X))$ beschrieben werden, ähnlich wie in Abschnitt 4.2. Zusammen mit Lemma 5.1 folgt die Behauptung. \square

5.2 Übergang zwischen Formen

In diesem Abschnitt sollen die Übergänge, die im Diagramm am Kapitelanfang skizziert sind, detaillierter beschrieben werden. Um aus irgendeiner Form eine Form von \mathbf{PGL}_2

als linearer algebraischer Gruppe oder prinzipal-homogenem Raum zu erhalten, muss als wesentlicher Teil der Arbeit die Darstellbarkeit der dabei vorkommenden Funktoren Isom und Aut bewiesen werden.

5.2.1 \mathbf{SL}_2 und \mathbb{M}_2

Die L/K -Formen von \mathbb{M}_n sind die *Azumaya-Algebren* (d. h. endlich-dimensionale zentral-einfache Algebren) der Dimension n^2 über K , die über L zerfallen (für die also $A_L \cong \mathbb{M}_n(L)$ gilt), vgl. [Str02], S. 44, [Ser79], X.4/5, [Mil97], IV). Die Azumaya-Algebren der Dimension 4 heißen *Quaternionenalgebren*.

Um aus einer Azumaya-Algebra eine L/K -Form von \mathbf{SL}_2 zu erhalten, benötigt man den Begriff der reduzierten Norm.

Definition 5.4. Sei A eine Azumaya-Algebra der Dimension n^2 über dem Körper K , und sei L ein Erweiterungskörper von K , über dem A zerfällt, sodass es einen Isomorphismus $h : A_L \rightarrow \mathbb{M}_n(L)$ gibt. Für $x \in A$ definiert man $N_{\text{red}}(x) := \det(h(x \otimes 1))$.

$N_{\text{red}}(x)$ liegt in K und ist unabhängig von der Wahl des Körpers L mit obiger Eigenschaft und von der Wahl des Isomorphismus h (vgl. [Bou58], §12.3).

Die Gruppe der Elemente von A , deren reduzierte Norm den Wert 1 hat, wird als $N_{\text{red}}^1(A)$ bezeichnet. Dabei ist $N_{\text{red}}^1(\mathbb{M}_2(K))$ die Gruppe $\mathbf{SL}_2(K)$.

Die Abbildung $A \mapsto N_{\text{red}}^1(A)$ ordnet einer L/K -Form A von \mathbb{M}_2 eine L/K -Form von \mathbf{SL}_2 zu und induziert eine Bijektion zwischen den K -Isomorphieklassen dieser beiden Mengen. Details findet man in [Ser02], III.1.4.

Wie man aus den Formen von \mathbf{SL}_2 die von \mathbb{M}_2 erhält, wird ebenfalls dort beschrieben.

5.2.2 Darstellbarkeit der Funktoren Isom und Aut

Sei $X \in \mathfrak{X}$ eines der oben angegebenen über K definierten Objekte, und sei X' eine L/K -Form von X . Für ein beliebiges Schema S über K sei

$$\text{Isom}(X, X')(S) := \{\phi : X \times_{\text{Spec } K} S \rightarrow X' \times_{\text{Spec } K} S \mid \phi \text{ ist Isomorphismus über } S\}.$$

Lemma 5.5. Die Abbildung $S \mapsto \text{Isom}(X, X')(S)$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Schemata über K in die Kategorie der Mengen.

Beweis. Sei $S' \rightarrow S$ ein Morphismus von Schemata über K , und sei $\phi \in \text{Isom}(X, X')(S)$, d. h. $\phi : X_S \rightarrow X'_S$ sei ein Isomorphismus über S . Dann ist $\phi_{S'} := \phi \times \text{id}$ offensichtlich ein Isomorphismus $X_S \times_S S' \rightarrow X'_S \times_S S'$ über S' , d. h. $\phi_{S'} \in \text{Isom}(X, X')(S')$, und die Erweiterung von Isomorphismen über S auf S' kommutiert mit der Verknüpfung der Isomorphismen. Damit ist $S \mapsto \text{Isom}(X, X')(S)$ ein kontravarianter Funktor. \square

Lemma 5.6. Sei X' eine L/K -Form von $X \in \mathfrak{X}$, und sei Y eine solche L/K -Form von \mathbf{PGL}_2 als homogenem Raum, dass X' und Y zur selben Kohomologiekategorie in $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ gehören. Man schränke die Funktoren $\text{Isom}(X, X')$ und Y von beliebigen Schemata über K auf affine Schemata über L ein.

Dann gibt es eine natürliche Transformation zwischen diesen eingeschränkten Funktoren, die sogar ein Isomorphismus ist.

Beweis. Auf den ersten Blick scheint die Behauptung trivial zu sein: da X und X' über L isomorph sind, gilt $\text{Isom}(X_L, X'_L) \cong \text{Aut}(X_L) \cong \mathbf{PGL}_2/L \cong Y/L$. Tatsächlich sind die angegebenen Isomorphismen aber nicht kanonisch, und es ist einiges mehr zu zeigen.

Da X' über L isomorph zu X ist, kann man einen Isomorphismus $\psi_0 \in \text{Isom}(X, X')(L)$ wählen. Damit erhält man für jede L -Algebra R eine Bijektion

$$\text{Isom}(X, X')(R) \rightarrow \text{Aut}(X)(R), \quad \psi \mapsto (\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi$$

mit Umkehrabbildung $\text{Aut}(X)(R) \rightarrow \text{Isom}(X, X')(R)$, $\phi \mapsto (\psi_0 \times_L \text{id}_R) \circ \phi$. Nach Wahl von ψ_0 ist $a : \sigma \mapsto a_\sigma := \psi_0^{-1} \circ \sigma \psi_0 \in \text{Aut}(X)(L) \cong \mathbf{PGL}_2(L)$ ein Kozykel, der X' definiert.

Kanonisch gilt $\alpha_R : \text{Aut}(X)(R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{PGL}_2(R)$ (Lemma 5.1), $\alpha : \text{Aut}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{PGL}_2$ ist also eine natürliche Transformation. Da Y über L definierte Punkte hat, kann man ein $y_0 \in Y(L)$ wählen. Wie in Lemma 4.1 definiert jeder L -rationale Punkt von Y einen Isomorphismus von \mathbf{PGL}_2 nach Y , der hier wie der Punkt bezeichnet sei.

Dann ist $b : \sigma \mapsto b_\sigma = y_0^{-1} \circ \sigma y_0 \in \text{Aut}(\mathbf{PGL}_2) = \mathbf{PGL}_2(L)$ der zu Y gehörige Kozykel. Da Y und X' Formen zur selben Kohomologiekategorie sind, gilt $[a] = [b]$, also $a_\sigma = z^{-1} b_\sigma z$ für ein $z \in \mathbf{PGL}_2(L)$. Damit gilt $(y_0 z)^{-1} \sigma (y_0 z) = z^{-1} b_\sigma z = a_\sigma$. Ersetzt man also y_0 durch $y_0 z$, dann ist der zugehörige Kozykel nicht nur kohomolog zu a_σ , sondern identisch dazu.

Die Abbildung $\mathbf{PGL}_2(R) \rightarrow Y(R)$, $y \mapsto (y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot y$ ist für jedes R eine Bijektion. Zusammen erhält man eine Bijektion $\beta_R : \text{Isom}(X, X')(R) \rightarrow Y(R)$.

Sei $\text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$ ein Morphismus von affinen Schemata über L , induziert von einem L -Algebren-Homomorphismus $R \rightarrow R'$. Zu zeigen ist, dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Isom}(X, X')(R) & \longrightarrow & \text{Isom}(X, X')(R') \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Aut}(X)(R) & \longrightarrow & \text{Aut}(X)(R') \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathbf{PGL}_2(R) & \longrightarrow & \mathbf{PGL}_2(R') \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ Y(R) & \longrightarrow & Y(R') \end{array}$$

kommutiert, wobei die senkrechten Pfeile wie oben angegeben und die waagerechten durch die Funktorialität von $\text{Isom}(X, X')$, \mathbf{PGL}_2 und Y definiert sind.

Wegen

$$((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi) \times_R \text{id}_{R'} = (\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_{R'}) \circ (\psi \times_R \text{id}_{R'})$$

kommutiert der obere Teil. Der mittlere Teil kommutiert, weil $\text{Aut}(X)$ und \mathbf{PGL}_2 kanonisch isomorph sind, und der untere Teil kommutiert wegen

$$((y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot y) \times_R \text{id}_{R'} = (y_0 \times_L \text{id}_{R'}) \cdot (y \times_R \text{id}_{R'}).$$

Da die senkrechten Pfeile Bijektionen sind, folgt daraus die Behauptung. \square

Für den folgenden Beweis, dass diese Abbildungen mit der Galois-Operation verträglich sind, ist entscheidend, dass X' und Y Formen zum selben Kozykel sind.

Lemma 5.7. *Seien X, X' und Y wie oben, und sei R eine L -Algebra. Dann operiert die Galois-Gruppe $\Gamma = \text{Gal}(L/K)$ in solcher Weise auf $\text{Isom}(X, X')(R)$ und $Y(R)$, dass die im Beweis von Lemma 5.6 definierte Abbildung $\beta_R : \text{Isom}(X, X')(R) \rightarrow Y(R)$ mit der Γ -Aktion kommutiert.*

Beweis. Man entnimmt $\beta_R(\psi) = (y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot \alpha_R((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi)$ dem Beweis des obigen Lemmas. Nach der dortigen Wahl von $\psi_0 \in \text{Isom}(X, X')(L)$ und $y_0 \in Y(L)$ gilt $a_\sigma = \alpha_L(\psi_0^{-1} \circ \sigma\psi_0) \in \mathbf{PGL}_2(L)$ und $a_\sigma = y_0^{-1} \cdot \sigma y_0 \in \mathbf{PGL}_2(L)$ für alle $\sigma \in \Gamma$, wobei $[a] \in H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ die zu X' und Y gehörige Kohomologiekategorie ist.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_R(\sigma\psi) &= (y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot \alpha_R((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \sigma\psi) \\ &= (y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot \alpha_R(((\psi_0^{-1} \sigma\psi_0) \times_L \text{id}_R) \circ ((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi)) \\ &= (y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot (\alpha_L(\psi_0^{-1} \sigma\psi_0) \times_L \text{id}_R) \cdot \sigma(\alpha_R((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi)) \\ &= (y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot (a_\sigma \times_L \text{id}_R) \cdot \sigma(\alpha_R((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi)) \\ &= (\sigma y_0 \times_L \text{id}_R) \cdot \sigma(\alpha_R((\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi)) \\ &= \sigma(\beta_R(\psi)), \end{aligned}$$

wobei α mit der Operation von σ verträglich ist, weil $\alpha : \text{Aut}(X) \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ über K definiert ist. \square

Satz 5.8. *Sei X' eine L/K -Form von $X \in \mathfrak{X}$, und sei Y die L/K -Form von \mathbf{PGL}_2 als homogenem Raum zur selben Kohomologiekategorie in $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$.*

Dann stellt Y den Funktor $\text{Isom}(X, X')$ auf der Kategorie der K -Schemata dar.

Beweis. Nach [EH00], Prop. VI-2, genügt es, affine Schemata $S = \text{Spec } R$ über K zu betrachten. Dabei ist R eine K -Algebra.

Zu zeigen ist also, dass für zwei beliebige K -Algebren mit einem K -Algebren-Homomorphismus $R \rightarrow R'$ das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{array}{ccc} \text{Isom}(X, X')(R) & \longrightarrow & \text{Isom}(X, X')(R') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y(R) & \longrightarrow & Y(R') \end{array}$$

und dass die senkrechten Abbildungen Bijektionen sind.

Betrachtet man statt der K -Algebren R und R' zunächst die L -Algebren R_L und R'_L , dann gilt die analoge Aussage für das entsprechende Diagramm nach Lemma 5.6, und nach Lemma 5.7 sind die senkrechten Abbildungen darin verträglich mit der Operation der Galois-Gruppe Γ . Für die waagerechten Abbildungen ist die Verträglichkeit offensichtlich.

Da für X und seine Formen sowie \mathbf{PGL}_2 als homogenem Raum und seine Formen der Galois-Abstieg funktioniert, bilden die Abbildungen des Diagramms für R_L und R'_L Elemente aufeinander ab, die Γ -invariant, also über R bzw. R' definiert sind. Daher kommutiert das Diagramm auch für R und R' . \square

Auf \mathbf{PGL}_2 als homogenem Raum und seiner L/K -Form Y operiert die lineare algebraische Gruppe \mathbf{PGL}_2 von rechts. Da $\text{Isom}(X, X')$ von Y dargestellt wird, operiert \mathbf{PGL}_2 auch auf $\text{Isom}(X, X')$. Konkreter sieht diese Operation auf R -rationalen Punkten so aus: $\mathbf{PGL}_2(R) \cong \text{Aut}(X)(R)$, und $\text{Aut}(X)(R)$ operiert durch Verknüpfung von rechts auf $\text{Isom}(X, X')(R)$.

Ganz analog zu Satz 5.8 für \mathbf{PGL}_2 als homogenem Raum beweist man folgendes Resultat für \mathbf{PGL}_2 als lineare algebraische Gruppe:

Satz 5.9. *Sei X' eine L/K -Form von $X \in \mathfrak{X}$, und sei Y die Form von \mathbf{PGL}_2 als lineare algebraische Gruppe zur selben Kohomologiekategorie. Dann stellt Y den Funktor $\text{Aut}(X')$ auf der Kategorie der K -Schemata dar.*

Beweisskizze. Wählt man analog zur obigen Vorgehensweise einen Isomorphismus ψ_0 zwischen X_L und X'_L über L , dann ergibt

$$\text{Aut}(X')(R) \rightarrow \text{Aut}(X)(R) \cong \mathbf{PGL}_2(R), \quad \psi \mapsto (\psi_0^{-1} \times_L \text{id}_R) \circ \psi \circ (\psi_0 \times_L \text{id}_R)$$

für jede L -Algebra R eine Bijektion, und man wählt außerdem einen Isomorphismus zwischen \mathbf{PGL}_2 und Y über L , der denselben Kozykel ergibt. Man zeigt dann, dass gewisse Diagramme kommutieren und mit den Operationen der Galois-Gruppe Γ verträglich sind, und erhält per Galois-Abstieg das Resultat. \square

5.2.3 \mathbf{PGL}_2 als algebraische Gruppe und homogener Raum

Die Formen von \mathbf{PGL}_2 als algebraischer Gruppe oder prinzipal-homogenem Raum sind insbesondere Formen von \mathbf{PGL}_2 als affinem Schema. Nach [Jah03], Lemma 2.12xi sind diese Formen daher ebenfalls affin.

Satz 5.10. *Sei $X \in \mathfrak{X}$.*

1. *Sei $G = \mathbf{PGL}_2$ als lineare algebraische Gruppe. Dann induziert*

$$\begin{aligned} \{L/K\text{-Formen von } X\} &\rightarrow \{L/K\text{-Formen von } G\} \\ X' &\mapsto \text{Aut}(X') \end{aligned}$$

eine Bijektion zwischen den K -Isomorphieklassen dieser beiden Mengen.

2. *Sei $H = \mathbf{PGL}_2$ als prinzipal-homogener Raum zur linearen algebraischen Gruppe G . Dann induziert*

$$\begin{aligned} \{L/K\text{-Formen von } X\} &\rightarrow \{L/K\text{-Formen von } H\} \\ X' &\mapsto \text{Isom}(X, X') \end{aligned}$$

eine Bijektion zwischen den K -Isomorphieklassen dieser beiden Mengen.

Beweis. Zu 1: Nach Satz 5.3 stehen beide Mengen von K -Isomorphieklassen in Bijektion zu $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$, und nach Satz 5.9 sind X' und $\text{Aut}(X')$ die jeweiligen Formen zu einer Kohomologiekategorie.

Zu 2: Ein ähnliches Argument beweist mit Satz 5.8 die Behauptung. \square

5.2.4 Formen von \mathbb{P}^1

Der Übergang von den L/K -Formen von \mathbb{P}^1 zu denen von \mathbf{PGL}_2 als linearer algebraischer Gruppe oder als prinzipal-homogenem Raum über sich selbst wird von Satz 5.10 beschrieben. Nun zur Umkehrung.

Lemma 5.11. *Sei $G = \mathbf{PGL}_2/K$, sei X/K ein prinzipal-homogener Raum zu G , und sei B eine Borelgruppe zu G . Dann ist X/B eine L/K -Form von \mathbb{P}^1 .*

Beweis. Da G über K einfach transitiv auf X operiert, ist der Quotient X/B wohldefiniert. Es gilt $X_L \cong G_L$, also auch $(X/B)_L \cong (G/B)_L$. Wegen $G/B \cong \mathbb{P}_K^1$ (Lemma 3.26) folgt die Behauptung. \square

Lemma 5.12. *Die lineare algebraische Gruppe G' sei eine L/K -Form von $G = \mathbf{PGL}_2$, und B sei eine Borelgruppe von G' . Dann ist G'/B eine L/K -Form von \mathbb{P}^1 .*

Beweis. Der Quotient G'/B existiert nach [Spr98], 12.2.1. Es gilt $G'_L \cong \mathbf{PGL}_2/L$, und B_L ist eine Borelgruppe von \mathbf{PGL}_2/L . Zusammen mit Lemma 3.26 gilt $(G'/B)_L \cong (\mathbf{PGL}_2/L)/B_L \cong \mathbb{P}_L^1$. \square

Formen von \mathbb{P}^1 haben folgende Eigenschaft:

Lemma 5.13. *Sei X eine L/K -Form von \mathbb{P}_K^1 . Dann lässt sich X als Quadrik in \mathbb{P}_K^2 einbetten.*

Beweis. Nach dem Satz von Riemann-Roch ([Har77], IV.1.3) gilt für ein beliebiges Geradenbündel \mathcal{L} auf einer über K definierten Kurve X :

$$\dim H^0(X, \mathcal{L}) - \dim H^0(X, \mathcal{L}^* \otimes \Omega) = \deg \mathcal{L} + 1 - g,$$

wobei g das Geschlecht der Kurve X und $\Omega = \Omega_{X/K}$ das Bündel der Differentiale ist. Weil hier X eine Form von \mathbb{P}_K^1 ist, gilt $g = 0$.

Für $\mathcal{L} = 0$ erhält man daraus $\dim H^0(X, \Omega) = 0$, und für $\mathcal{L} = \Omega$ ergibt sich $\deg \Omega = -2$ (vgl. auch [Har77], Beispiel IV.1.3.3), also $\deg(\Omega \otimes \Omega) = -4$, und weil ein Divisor von negativem Grad über dem algebraischen Abschluss auf $X_{\overline{K}} = \mathbb{P}_{\overline{K}}^1$ keine globalen Schnitte hat, muss auch $\dim H^0(X, \Omega \otimes \Omega) = 0$ gelten. Setzt man nun $\mathcal{L} = \Omega^*$, erhält man

$$\dim H^0(X, \Omega^*) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

Damit hat der über K definierte Divisor Ω^* Grad 2 und einen 3-dimensionalen Raum von globalen Schnitten. Da Divisoren positiven Grades auf Kurven durch globale Schnitte erzeugt sind, erhält man daraus (mit [Har77], II.7.1) eine Einbettung in \mathbb{P}^2 vom Grad 2. Damit ist X eine Quadrik. \square

Der Zusammenhang zwischen Formen von \mathbb{P}^1 und von \mathbb{M}_2 ist ein Teil der Bijektion zwischen Brauer-Severi-Varietäten und Azumaya-Algebren, die in [Jah03] beschrieben wird.

5.3 Quaternionenalgebren und \mathbf{PGL}_2

Als Anwendung des Zusammenhangs zwischen L/K -Isomorphieklassen von Quaternionenalgebren und $H^1(L/K, \mathbf{PGL}_2)$ lässt sich diese Kohomologiegruppe für einige Körper mit Hilfe bekannter Resultate über die zugehörige Brauergruppe berechnen.

Für beliebige $a, b \in K^*$ erhält man eine Algebra mit Basis e_1, e_i, e_j, e_k , mit Multiplikation durch $e_i^2 = ae_1, e_j^2 = be_1, e_k^2 = -abe_1, e_i e_j = -e_j e_i = e_k, e_i e_k = -e_k e_i = ae_j, e_j e_k = -e_k e_j = -be_i$ und mit e_1 als neutralem Element. Diese Algebra bezeichnet man als Normrestalgebra $(a, b, -1)$.

Nach [Str02], Satz 63 beschreibt dies eine Quaternionenalgebra, und jede Quaternionenalgebra ist von der Form $(a, b, -1)$ für passende $a, b \in K^*$.

Im Fall $K = \mathbb{R}$ und $a = b = -1$ ist das die Hamiltonsche Quaternionenalgebra \mathbb{H} .

Eine Einbettung von $(a, b, -1)$ in $\mathbb{M}_2(\bar{K})$ erhält man durch $e_1 \mapsto M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_i \mapsto M_i = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_j \mapsto M_j = \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} \end{pmatrix}$, $e_k \mapsto M_k = \begin{pmatrix} 0 & -a\sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}$. Man rechnet leicht nach, dass diese Matrizen M_α Relationen analog zu denen der e_α erfüllen. Insbesondere wird jede Quaternionenalgebra über der Erweiterung $L = K(\sqrt{b})$, deren Grad höchstens 2 ist, isomorph zu $\mathbb{M}_2(L)$.

5.3.1 Lokale Körper

In diesem Abschnitt sollen nur lokale Körper der Charakteristik 0 betrachtet werden, also endliche Erweiterungen der Körper \mathbb{Q}_p .

Beispiel 5.14. Sei K ein lokaler Körper, und sei π das maximale Ideal des zugehörigen Ringes der ganzen Zahlen. Nach [Mil97], IV.4 hat man einen Isomorphismus $\text{inv}_K : \text{Br}(K) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Jede Azumaya-Algebra Q hat die Form $\mathbb{M}_n(D)$ mit einem Schiefkörper D und einem $n \in \mathbb{Z}^+$. Dabei sind n und D eindeutig bestimmt. Wegen $[Q : K] = n^2[D : K]$ im Allgemeinen gilt für eine Quaternionenalgebra entweder $n = 2$ und $D = K$, d. h. Q ist die Matrixalgebra $\mathbb{M}_2(K)$, oder $n = 1$ und $Q = D$, d. h. Q ist ein Schiefkörper.

Die Ordnung eines Schiefkörpers D in $\text{Br}(K)$ ist $\sqrt{[D : K]}$ (vgl. [Mil97], Bemerkung IV.4.4). Die Elemente von Ordnung ≤ 2 in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sind $0 + \mathbb{Z}$ und $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, wobei ersteres offenbar der trivialen Quaternionenalgebra $\mathbb{M}_2(K)$ entspricht.

Damit ist bewiesen: über einem lokalen Körper gibt es genau eine nicht-triviale Quaternionenalgebra, und es gilt $H^1(K, \mathbf{PGL}_2(K)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Auf folgende Weise erhält man diese nicht-triviale Quaternionenalgebra Q : Lokale Körper haben für jedes $n \in \mathbb{Z}^+$ genau eine unverzweigte Erweiterung vom Grad n (vgl. [Mil98], Beispiel 7.45). Sei L die unverzweigte Erweiterung von K vom Grad 2. Für einen beliebigen quadratischen Nichtrest α modulo π gilt dann $L = K(\sqrt{\alpha})$. Sei $\beta = \sqrt{\alpha}$. Das nicht-triviale Element σ von $G = \text{Gal}(L/K)$ operiert dann durch $\sigma\beta = -\beta$. Es gilt $Q = Le_0 \oplus Le_1 = Ke_0 \oplus K\beta e_0 \oplus Ke_1 \oplus K\beta e_1$ entsprechend der Konstruktion in [Mil97], Beispiel IV.4.2, und die Multiplikation definiert man über die Regeln $e_0\beta = \beta e_0, e_1\beta = \sigma\beta e_1$ sowie $e_0^2 = e_0, e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, e_1^2 = \pi e_0$. Man prüft leicht nach, dass das die Quaternionenalgebra $(\alpha, \pi, -1)$ ergibt.

Lemma 5.15. *Für einen lokalen Körper K hat $H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$ genau n Elemente.*

Beweis. $\mathrm{Br}(K)$ beschreibt die Klassen von Azumaya-Algebren. Dabei lässt sich jede Azumaya-Algebra eindeutig als $\mathbb{M}_k(D)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}^+$ und einem über K zentralen Schiefkörper D beschreiben, und zwei Azumaya-Algebren $\mathbb{M}_k(D)$ und $\mathbb{M}_{k'}(D')$ gehören genau dann zur selben Klasse, wenn $D \cong D'$ gilt.

Wie in [Mil97], Bemerkung IV.4.4(b) beschrieben wird, hat der zu $[\frac{l}{j}] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{Br}(K)$ gehörige Schiefkörper D Dimension j^2 über K , falls $\frac{l}{j}$ ein gekürzter Bruch ist. Da $\mathbb{M}_k(D)$ Dimension $(kj)^2$ über K hat, hat man für jedes $\frac{i}{n}, i \in \{0, \dots, n-1\}$ genau eine Azumaya-Algebra der Dimension n^2 .

Da $H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$ in Bijektion zur Menge der n^2 -dimensionalen Azumaya-Algebren über K steht, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 5.16. Das Bild von $H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$ unter der Einbettung in $\mathrm{Br}(K)$ aus Bemerkung 1.8 ist $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Auf diese Weise bekommt $H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$ die Struktur einer zyklischen Gruppe.

Lemma 5.17. $H^1(\mathbb{R}, \mathbf{PGL}_n)$ ist trivial, falls n ungerade ist, und hat genau zwei Elemente, falls n gerade ist.

Beweis. Wie in Bemerkung 1.8 beschrieben, gilt $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und die zugehörigen Schiefkörper sind \mathbb{R} und \mathbb{H} . Für jedes $k \in \mathbb{Z}^+$ gibt $\mathbb{M}_k(\mathbb{R})$ eine k^2 -dimensionale Azumaya-Algebra und $\mathbb{M}_k(\mathbb{H})$ eine $(2k)^2$ -dimensionale, da \mathbb{H} Dimension 4 über \mathbb{R} hat.

Je nachdem, ob n ungerade oder gerade ist, hat man also eine oder zwei Azumaya-Algebren der Dimension n^2 . \square

5.3.2 Zahlkörper

Sei nun K ein Zahlkörper und M_v die Menge der endlichen und unendlichen Stellen von K . Für jede Stelle $v \in M_v$ ergibt die Abbildung $K \rightarrow K_v$, wobei K_v die Komplettierung von K an der Stelle v ist, durch die Funktorialität der Gruppenkohomologie eine Abbildung $H^1(K, G) \rightarrow H^1(K_v, G)$, $[a] \mapsto [a_v]$. Diese lassen sich zu

$$H^1(K, G) \rightarrow \prod_{v \in M_v} H^1(K_v, G)$$

zusammensetzen.

Satz 5.18. Sei $[a] \in H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$. Dann ist $[a_v] \in H^1(K_v, \mathbf{PGL}_n)$ nur für endlich viele Stellen nicht-trivial, und man erhält eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(K, \mathbf{PGL}_n) \rightarrow \bigoplus_{v \in M_v} H^1(K_v, \mathbf{PGL}_n) \rightarrow \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

wobei die letzte Abbildung Summenbildung unter Benutzung von $H^1(K_v, \mathbf{PGL}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ ist. \blacksquare

Beweis. Sei $G = \mathbf{PGL}_n/K$. Man betrachtet das folgende kommutative Diagramm. Die untere Zeile ist als exakt bekannt (sog. fundamentale exakte Sequenz der globalen Klassenkörpertheorie, vgl. [Mil97], VIII.2.2), und die Exaktheit der oberen soll bewiesen

werden. Die senkrechten Abbildungen i_1 , i_2 (vgl. Bemerkung 1.8) und offensichtlich auch i_3 sind injektiv.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(K, G) & \xrightarrow{\phi'} & \bigoplus_{v \in M_v} H^1(K_v, G) & \xrightarrow{\psi'} & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
& & i_1 \downarrow & & i_2 \downarrow & & i_3 \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Br}(K) & \xrightarrow{\phi} & \bigoplus_{v \in M_v} \text{Br}(K_v) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ein $[\alpha] \in H^1(K, G)$ lässt sich als K -Isomorphieklasse einer n^2 -dimensionalen Azumaya-Algebra α auffassen. Das Element $[\alpha_v] \in \text{Br}(K_v)$ ist nur für endlich viele $v \in M_v$ nicht-trivial und wird von der entsprechenden n^2 -dimensionalen Azumaya-Algebra α_v über K_v repräsentiert, liegt also tatsächlich in $H^1(K_v, \mathbf{PGL}_n)$. Die Abbildung ϕ' ist damit wohldefiniert. Wegen der Injektivität von ϕ , i_1 und i_2 muss auch ϕ' injektiv sein.

Weil n^2 -dimensionale Azumaya-Algebren unter dem Isomorphismus $\text{Br}(K_v) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ abgebildet werden und weil jedes Element von $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ durch eine n^2 -dimensionale Azumaya-Algebra repräsentiert wird (vgl. Beweis von Lemma 5.15), ist die Abbildung ψ' wohldefiniert und surjektiv.

Weil i_3 injektiv ist und $\psi \circ \phi = 0$ gilt, folgt $\psi' \circ \phi' = 0$.

Sei nun $\beta = \bigoplus [\beta_v] \in \ker(\psi')$. Dann gilt $i_2(\beta) \in \ker(\psi) = \text{im}(\phi)$, d. h. es gibt eine Azumaya-Algebra α über K mit $[\alpha_v] = i_2(\beta)_v$ für alle $v \in M_v$. Zu zeigen ist, dass α Dimension n^2 hat, also ein Element von $H^1(K, G)$ repräsentiert. Die Ordnung von β ist n , und weil alle Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind, gilt

$$\phi(n \cdot [\alpha]) = n \cdot [\alpha_v] = n \cdot i_2(\beta)_v = i_2(n \cdot \beta)_v = 0.$$

Wegen der Injektivität von ϕ hat auch $[\alpha] \in \text{Br}(K)$ Ordnung n . Über Zahlkörpern stimmt bekanntlich die Ordnung eines Elements der Brauergruppe mit dem Index des Schiefkörpers, der es repräsentiert, überein (vgl. [PR94], 6.5, S. 331 für diese nicht-triviale Aussage). Daher kann man α als n^2 -dimensionale Azumaya-Algebra wählen, und $[\alpha] \in H^1(K, G)$ ist dann das Urbild von β unter ψ' . \square

Literaturverzeichnis

- [Bor70] BOREL, ARMAND: *Properties and linear representations of Chevalley groups*. In: *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, Seiten 1–55. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Bor75] BOREL, ARMAND: *Linear representations of semi-simple algebraic groups*. In: *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Seiten 421–440. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [Bor91] BOREL, ARMAND: *Linear algebraic groups*, Band 126 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1991.
- [Bou58] BOURBAKI, N.: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIII. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre VIII: Modules et anneaux semi-simples*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1261. Hermann, Paris, 1958.
- [Bou68] BOURBAKI, N.: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [Bou75] BOURBAKI, N.: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVIII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII: Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII: Algèbres de Lie semi-simples déployées*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1364. Hermann, Paris, 1975.
- [EH00] EISENBUD, DAVID und JOE HARRIS: *The geometry of schemes*, Band 197 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Har77] HARTSHORNE, ROBIN: *Algebraic geometry*, Band 52 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Hum75] HUMPHREYS, JAMES E.: *Linear algebraic groups*, Band 21 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [Jah03] JAHNEL, JÖRG: *The Brauer-Severi Variety Associated with a Central Simple Algebra: A Survey*. *Mathematica Gottingensis*, 2, 2003.

- [Jan87] JANTZEN, JENS CARSTEN: *Representations of algebraic groups*, Band 131 der Reihe *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.
- [Mil97] MILNE, J. S.: *Class Field Theory*. <http://www.jmilne.org/math/>, Course Notes, v3.1, 1997.
- [Mil98] MILNE, J. S.: *Algebraic Number Theory*. <http://www.jmilne.org/math/>, Course Notes, v2.10, 1998.
- [PR94] PLATONOV, VLADIMIR und ANDREI RAPINCHUK: *Algebraic groups and number theory*, Band 139 der Reihe *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.
- [Ser79] SERRE, JEAN-PIERRE: *Local fields*, Band 67 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.
- [Ser92] SERRE, JEAN-PIERRE: *Lie algebras and Lie groups*, Band 1500 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1992. 1964 lectures given at Harvard University.
- [Ser02] SERRE, JEAN-PIERRE: *Galois cohomology*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, English Auflage, 2002. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author.
- [Spr98] SPRINGER, T. A.: *Linear algebraic groups*, Band 9 der Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2. Auflage, 1998.
- [Ste63] STEINBERG, ROBERT: *Representations of algebraic groups*. Nagoya Math. J., 22:33–56, 1963.
- [Str02] STROTH, SUSANNA KRISTIN: *Quaternionenalgebren über rationalen Funktionenkörpern in zwei Unbestimmten*. Göttingen, 2002.
- [Tit71] TITS, J.: *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*. J. Reine Angew. Math., 247:196–220, 1971.
- [Wat79] WATERHOUSE, WILLIAM C.: *Introduction to affine group schemes*, Band 66 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_0^+$	Die Menge der ganzen / positiven ganzen / nicht-negativen ganzen Zahlen.
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Der Körper der rationalen / reellen / komplexen Zahlen.
\mathbb{F}_q	Der endliche Körper mit q Elementen.
\mathbb{M}_n	Die Algebra der $n \times n$ -Matrizen.
K, K^*	Ein Körper, seine Einheiten.
K^{sep}, \bar{K}	Der separable / algebraische Abschluss von K .
$\text{Gal}(L/K)$	Die Galoisgruppe einer galoisschen Körpererweiterung L/K .
$R, \text{Spec } R$	Ein Ring, sein Spektrum.
X/K	Oft eine Varietät oder ein Schema, definiert über K .
$K[X]$	Der Koordinatenring der Varietät X/K .
$\ker(\phi), \text{im}(\phi)$	Der Kern / das Bild der Abbildung ϕ .
ϕ^*	Die von einem Morphismus ϕ induzierte Abbildung auf den Koordinatenringen.
$X(K)$	Die K -rationalen Punkte von X .
X_L	$X \times_K L = X \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L$.
$T \subset B \subset G$	Eine über einem Körper K definierte lineare algebraische Gruppe G mit Borelgruppe B und maximalem Torus T .
$\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m$	Die additive / multiplikative lineare algebraische Gruppe.
μ_n	Die Gruppe der n -ten Einheitswurzeln.
$\mathbf{GL}_n, \mathbf{SL}_n$	Die allgemeine / spezielle lineare Gruppe.
$\mathbf{PGL}_n, \mathbf{PSL}_n$	$\mathbf{GL}_n/\mathbb{G}_m, \mathbf{SL}_n/\mu_n$.
$\text{Lie}(G)$	Die Lie-Algebra einer linearen algebraischen Gruppe G .
$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} mit Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} und maximalem Torus \mathfrak{t} .
Ad	Die adjungierte Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe in ihre Lie-Algebra.
ad	Die adjungierte Darstellung einer Lie-Algebra in sich selbst.
$B(\cdot, \cdot)$	Die Killing-Form einer Lie-Algebra.
$\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{pgl}_n$	$\text{Lie}(\mathbf{GL}_n), \text{Lie}(\mathbf{SL}_n), \text{Lie}(\mathbf{PGL}_n)$.
id, Δ	Die Identitäts- / Diagonalabbildung.
μ, e	Die Multiplikation / das neutrale Element in einer Gruppe.
l_g, r_g	Links-/Rechtstranslation mit einem Gruppenelement g .
λ_g	Die Operation durch $l_{g^{-1}}^*$ auf $K[G]$.
Γ	Eine endliche oder pro-endliche Gruppe; oft eine Galois-Gruppe.
$H^i(\Gamma, A)$	Die i -te Kohomologiegruppe von Γ mit Werten in A .
$[a]$	Die Kohomologieklassse des Kozykels a in $H^i(\Gamma, A)$.

σ_x, σ'_x	Die Standard-Operation / eine getwistete Operation von σ auf x .
A^Γ	Die unter der Operation von Γ fixierten Elemente von A .
$H^i(L/K, G)$	$H^i(\text{Gal}(L/K), G(L))$.
$H^i(K, G)$	$H^i(\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K), G(K^{\text{sep}}))$.
$\mathcal{L}, \mathcal{O}(n)$	Eine invertierbare Garbe, Serres n -fach getwistete Garbe.
$\text{Pic } X$	Die Picard-Gruppe eines Schemas X .
\mathbb{P}_K^n	Der projektive n -dimensionale Raum über einem Körper K .
$I_n, E_{i,j}$	Die $n \times n$ -Einheitsmatrix, eine Fundamentalmatrix.
δ_{ij}	Das Kronecker-Symbol.
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	Die $n \times n$ -Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ auf der Diagonalen.
$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$	Eine Matrix aus $\mathbf{GL}_2(K)$ oder $\mathbf{SL}_2(K)$.
$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$	Die Klasse der Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{PGL}_2(K)$.
$\det(x), D$	Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $D = (\det(x))^{-1}$.
$\langle \dots \rangle_{K\text{-VR}}$	Ein von gewissen Vektoren über K aufgespannter Vektorraum.
$\langle \dots \rangle_{K\text{-Alg}}$	Eine von gewissen Elementen über K erzeugte Algebra.
$\text{End}(V)$	Die Endomorphismen des Vektorraums V .
$\text{Hom}(V, W)$	Die Homomorphismen von V nach W .
$\text{Aut}(X)$	Die Automorphismen von X (evtl. als Funktor).
$\text{Isom}(X, X')$	Die Isomorphismen von X nach X' (evtl. als Funktor).
$X(T), X(T)_1$	Die Charaktergruppe des Torus T , deren Teilmenge aus Satz 3.24.
(ϕ, V)	Die Darstellung $\phi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$.
χ	Ein Charakter, oft ein Gewicht oder eine Wurzel.
V_χ, V_χ^B	Der Eigenraum / Borel-Eigenraum zum Gewicht χ .
ϕ_χ	Die Darstellung zum Höchstgewicht χ .
$K[G]_\chi$	Eine Realisierung von $\phi_{i(\chi)}$ in Charakteristik 0.
Φ, Φ^+, Δ	Ein Wurzelsystem, die positiven / fundamentalen Wurzeln darin.
W, w_0	Die Weylgruppe eines Wurzelsystems, $w_0(\Phi^+) = -\Phi^+$.
ℓ_α	Das fundamental-dominante Gewicht zu $\alpha \in \Delta$.
A_n	Ein Standard-Wurzelsystem.
$\xi_{-\chi}$	Das Geradenbündel aus Def. 3.6.
i	Die Abbildung aus Def. 3.7 auf den Wurzeln. Oder: $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.
$\Gamma(U, \xi)$	Die Schnitte der Garbe ξ auf der offenen Menge U .
F	Der Frobenius-Endomorphismus eines Körpers in Charakteristik p .
$(\phi^{[i]}, V^{[i]})$	Die i -fache Anwendung des Frobenius auf die Darstellung (ϕ, V) .
$K[G]^{\text{deg } n}$	Funktionen aus $K[G]$, deren Zähler Grad n haben.
\mathfrak{X}	Eine Menge von Objekten mit Automorphismengruppe \mathbf{PGL}_2 .
$\text{tr } M$	Die Spur einer Matrix M .
$\text{Br}(K)$	Die Brauer-Gruppe des Körpers K .
\mathbb{H}	Die Hamiltonsche Quaternionenalgebra.

Danksagung

Zum Abschluss dieser Arbeit möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben. Besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. U. Stuhler für die interessante Themenstellung sowie die sehr gute und stets freundliche Betreuung.

Meinen Eltern danke ich für ihre uneingeschränkte Unterstützung während meines gesamten Studiums. Ferner danke ich meinen Freunden für die vielen schönen Erinnerungen, die ich mit dem Studium verbinde. Vielen Dank an Kristin Stroth und Karsten Roeseler für die Hilfe beim Korrekturlesen der Arbeit. Nicht zuletzt danke ich Inga Kenter für ihre Geduld und eine schöne gemeinsame Zeit, während ich diese Arbeit geschrieben habe.

Göttingen, im Dezember 2003

Ulrich Derenthal